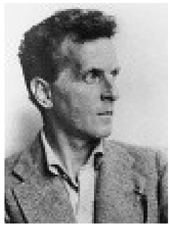
A crise nos fundamentos da Matemática e a teoria da Computação

Qual é a natureza da verdade matemática? *[1]

Palestra Proferida no Seminário de Filosofia da UnB

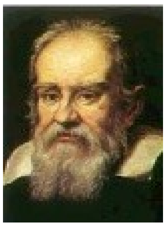
Pedro Antonio Dourado de Rezende
Departamento de Ciência da Computação
Universidade de Brasília
9 de Fevereiro de 1999

" *A filosofia é uma batalha contra o enfeitiçamento da inteligência por meio da linguagem*"
Ludwig Wittgenstein (foto):
Philosophical Investigations, s. 111.

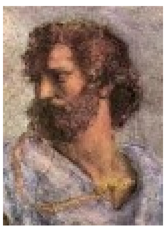


Introdução

Pretendo apresentar neste texto, como educador atento que enfrenta o desafio de mapear o curso de uma ciência ainda em sua infância e à qual se dedica, uma perspectiva histórica do cenário de sua gênesis, com a intenção de permitir-nos melhor nitidez na percepção de suas aspirações, de suas fronteiras, da natureza de seus problemas e limites.



Buscarei mostrar como o nascimento da teoria da Computação decorreu do esforço despendido por filósofos no início de século XX para iluminar a natureza da verdade matemática, problema posto em aguda evidência pela turbulenta etapa na evolução do pensamento matemático ocorrida entre aproximadamente 1874 e 1936, etapa que alguns historiadores da ciência se referem como "a crise nos fundamentos" (1), e que podemos interpretar como o desfecho da fase de seu amadurecimento correspondente ao surgimento da ciência moderna, iniciada com o legado de Galileu (imagem), Leibniz, e Newton.



Para podermos capturar a essência desse esforço, é necessário partirmos de onde surge, no pensamento grego, a questão filosófica que está no cerne desta crise. Tal questão aborda um conceito que, uma vez abrigado na matemática, torna-a independente da experiência e, portanto, distinta de qualquer outra ciência, como até mesmo os mais empedernidos empiristas na tradição de Hume podem ser levados a reconhecer: o conceito do infinito (2: pp.82). Já neste primeiro encontro com o infinito, a matemática e a filosofia foram conduzidas a paradoxos, mas também à descoberta do irracional, levando Aristóteles (imagem) à posição que considera o ilimitado (*apeiron*) como "ente em potência" (*dynamei on*), ou, segundo Simplício comentando Aristóteles, "que tem seu ser no devir".

Ao romper radicalmente, em sua teoria dos conjuntos, com toda a tradição filosófica e matemática de tratar o infinito segundo a tese aristotélica do ser em potencial, Georg Cantor (foto) permite que paradoxos – até então cuidadosamente confinados ao uso impreciso da linguagem natural – reapareçam com força insofismável na fundação basilar do edifício do conhecimento matemático, que tantos triunfos trouxera às ciências da natureza, pondo em marcha, de forma dramática, uma jornada de profícua investigação filosófica sobre seus fundamentos.

Podemos considerar como marco entre a etapa trepidante desta investigação – conseqüência da libertação do pensamento matemático do (quase) absoluto domínio aristotélico – e o seu amadurecimento, os teoremas de Kurt Gödel (foto) sobre a incompletude da aritmética, com os resultados subsequentes de Gentzen, Skolem e a hipótese de Church completando a contribuição desta investigação para uma releitura do papel da matemática na epistemologia da ciência contemporânea. Especulações sobre as razões para Cantor assim agir e as reações que causou, sobre possíveis influências desta releitura na dinâmica das correntes do pensamento filosófico contemporâneo, e sobre o trajeto da teoria da Computação neste contexto, serão ventiladas.

Dos Gregos à matemática moderna

Os gregos foram, pelo testemunho literário, não só pioneiros em tratar processos convergentes ilimitados por meios matemáticos, como na dicotomia*[2] descrita por Zenão de Eléia (3), mas também no emprego de demonstrações para suas proposições matemáticas, tendo com isso descoberto a incomensurabilidade recíproca entre certas grandezas geométricas. Mas o senso comum da época considerava paradoxal um processo ilimitado de crescimento poder atingir resultado limitado e definido, já que exemplos semelhantes ao da dicotomia de Zenão, como o da série harmônica*[3], não o podiam.

Acredita-se que os pitagóricos já conheciam a impossibilidade de se medir a diagonal de um quadrado em relação a seu lado, através do processo da subtração recíproca (*antanairesis*). A versão aritmética deste processo de medição é descrita por Euclides em "Elementos", hoje conhecida como algoritmo de Euclides para divisão inteira. Tal descoberta possivelmente contribuiu para o declínio da escola pitagórica, e afirmou a oposição entre os conceitos de extensão contínua (*megethos*) – que poderia ser dividido ao meio ad infinitum – e de número (*arithmos*) – que não poderia – em

Aristóteles.

Do ponto de vista lógico, configura-se a seguinte questão: se existe somente divisibilidade finita (de extensões no espaço e no tempo) não há incomensurabilidade, mas sim uma medida mínima para tudo e a tese atomista é reforçada, enquanto a divisibilidade infinita torna possível o irracional, isto é, a existência de segmentos incomensuráveis por métodos geométricos (2: pp.93). Esta última hipótese é empregada por Eudoxo , junto com o principio da continuidade*[4] de Platão, no seu "processo de exaustão" (*dapanan*), descrito no quinto livro dos "Elementos" de Euclides e precursor da idéia de limite que iremos encontrar com o surgimento da matemática moderna, no cálculo infinitesimal de Leibniz e no calculo das fluxões de Newton.

Para Aristóteles, não há infinito atual por acréscimo, pois o mundo estaria limitado pela abóbada celeste (a esfera de estrelas fixas), mas existe, em certo sentido, o infinito por divisão, o infinito em pequenez. A dicotomia sem fim de Zenão é possível, pois os pontos dentro de um segmento só aparecem pela divisão, enquanto que antes da divisão só estavam presentes potencialmente, e só por meio dela adquirem atualidade.

A incomensurabilidade deixa assim de ser problemática ou importante para o Estagirita, sendo mencionada pelo legado de sua obra apenas no texto de Teofrasto "*De lineis insecabilibus*", incluído no *Corpus Aristotelicum*, em um argumento contra os "átomos lineares" (2: pp 98). A diagonal do quadrado de lado unitário, outras raízes de números primos estudadas por Teodoro (2: pp.91), e a razão áurea adquirem, com Eudoxo, status de "grandeza irracional"

Em oposição estrita a tal concepção da continuidade de segmentos geométricos está o da análise clássica, como nos é hoje apresentada. O segmento, para Aristóteles, não se compõe de pontos, embora um número sem fim de pontos estejam nele "em potência", no sentido de só poderem se tornar atuais por operações matemáticas construtivas, como a divisão. Ao contrário de Platão, que atribuiu aos objetos matemáticos existência real, intermediária entre idéias e coisas sensíveis, Aristóteles os caracterizou como abstrações (*aphairesis*) (2: pp 100). Na análise clássica, baseada em teorias dos conjuntos que se seguiram à teoria de Cantor, o segmento é um conjunto infinito atual de pontos, oferecidos à observação quando nele se aplica a divisão ou outra construção matemática.

O conceito de infinito em potencial de Aristóteles desempenha também papel essencial na doutrina das antinomias de Kant, empregado para solucionar as primeiras antinomias cosmológicas sobre a finitude ou não da extensão e da divisibilidade do mundo no tempo e no espaço (4: pp 545), cuja "crítica da razão pura" desempenha importante papel na releitura epistemológica contemporânea da matemática (5). Antes de chegarmos a Cantor, porém, devemos contemplar a paisagem histórica onde emergiu sua obra.

Na matemática geometrizada grega antiga, já se abstraem conceitos das figuras concretas, e desses, conclusões independentes, como na teoria das proporções de Eudoxo. Refletindo sobre o que há de universal na matemática, em "Metafísica", Aristóteles afirma que o matemático contempla aquilo que existe por abstração, em que vê coisas diferentes do ponto de vista quantitativo e contínuo (pontos, linhas, superfícies, corpos), enquanto o "filósofo primeiro" (o metafísico) contempla todas as coisas do ponto de vista do ser. Apesar desta diferença, há semelhança no caráter formal comum que possuem a matemática e a ontologia universais, o que contribui para o surgimento na renascença da idéia de uma Mathesis universalis, primeiro de forma incipiente, com o calculo literal de Viète e a geometria analítica de Descartes, e depois com Leibniz, que cunhou o termo para designar a sua proposta de um cálculo simbólico universal da quantidade e da qualidade: uma forma para a matemática que a libertasse da figura geométrica e das limitações do número, e coroasse assim a capacidade abstrativa da razão humana.

O aforismo forjado por Sir Francis Bacon, "*Naturam renunciando vincimus*" (pela renuncia venceremos a natureza), reflete a essência da revolução ocorrida no espírito renascentista que fertilizou o pensamento matemático, promovendo seu desenvolvimento ao estado atual. Por paradoxal que possa parecer, o processo para arrancar à natureza seus mistérios e dominar suas forças é renunciar ao conhecimento de sua "essência". Esta idéia já estava em Galileu*[5], que se afastou da tradição aristotélico-medieval renunciando a investigar as causas do movimento de corpos, para se limitar ao decurso da queda e das trajetórias balísticas . Tal tipo de renúncia tem por conseqüência um estreitamento do horizonte de respostas possíveis, e esta limitação por sua vez favorece a elucidação, pela forma matemática de pensar (pelo método analítico), de conceitos centrais às leis fundamentais da natureza. Este processo pode ser identificado na emergência de diversas teorias "de relatividade" ao longo da história da física, baseadas em princípios de invariância e simetria sob certos grupos de transformações.

Exemplos dessas teorias estão entre os mais espetaculares avanços da ciência moderna, como a mecânica newtoniana (leis invariantes ao movimento inercial), a teoria da relatividade restrita (leis invariantes à velocidade de propagação eletromagnética) e a teoria da relatividade geral (leis invariantes ao próprio movimento) de Einstein, e a teoria quântica (leis invariantes com respeito a relações de indeterminação de Heisenberg). Tais sucessos impulsionam o pensamento matemático moderno em direção a formalizações e abstrações crescentes, onde a negação de determinado conhecimento físico traz consigo a imposição de relações de simetria às leis fundamentais da natureza, enriquecendo ainda assim seus significados e propondo a substituição da sua contingência por uma espécie de "necessidade pitagórica" (2: pp 46), com reflexos nas possíveis motivações para um pensar metafísico pós-kantiano (5).

Por outro lado, este "impulso pragmático" expôs o pensamento matemático, durante seus primeiros passos nesta nova trajetória, a um apreço pelo poder analítico desproporcional em relação ao cuidado com o método empregado para desenvolvê-lo. Já com a teoria da gravitação de Newton se desvelam limitações internas da matemática para solucionar problemas*[6] ali propostos, tendo seu calculo de fluxões recebido contundentes críticas de Berkeley pelo uso descuidado com que manipula o conceito de infinito. Guiados por instinto e por sucessos anteriores, os matemáticos continuaram, entretanto, a elaborar teorias analíticas que operam com figuras ou formas que se estendem indefinidamente, chegando os mais incautos eventualmente a contradições insolúveis, como nas séries limitadas não convergentes, abaixo exemplificada:

```
1-1 +1-1 +1-1 ... = ? =
(1-1)+(1-1)+(1-1)...= 0 =
1-(1-1)-(1-1)-(1-1)...= 1 ?
```

Surge então, na passagem do século XVIII para o XIX, uma atitude crítica ao pensamento matemático – em paralelo, e não por acaso, ao desaparecimento do dogmatismo racionalista dos sucessores de Leibniz e ao surgimento da critica da razão por Kant – que começa por investigar, com Saccheri e Lambert, o status do axioma das paralelas na geometria euclideana, e com Lagrange, os fundamentos de um "calculo diferencial" que pudesse omitir o uso de "elementos infinitesimais". Esta atitude crítica evolui gradualmente para uma extensa e complexa disciplina que abrange diversos estágios de questionamentos filosóficos perenes, tomando por vezes rumos e contornos inesperados, num esforço de compreensão dos limites do pensamento matemático.

O momento culminante deste esforço parece se dar com as tentativas de eliminação de potenciais paradoxos, conhecidos ou não, das teorias matemáticas importantes, em face do que ocorrera à teoria dos conjuntos de Cantor, havendo um desses rumos eventualmente se tornado a disciplina hoje referida como teoria da Computação, que adquiriu contornos próprios cerca de uma década antes da construção da primeira máquina eletrônica digital.

A teoria ingênua dos conjuntos de Cantor

A questão dos fundamentos lógicos pressupostos no método da exaustão de Eudoxo reaparece na matemática moderna, com o cálculo de fluxões e o calculo infinitesimal. Depois de Lagrange surgem Gauss, Cauchy e Abel, sensíveis à atitude critica estimulada por Berkeley, que buscam fundamentos mais sólidos para o conceito de limite, introduzido de forma *ad-hoc* para a determinação de tangentes e taxas de variações, baseado apenas em vagas intuições geométricas, no desenvolvimento desses cálculos por Newton e Leibniz respectivamente. Cauchy chega a uma elegante teoria de funções contínuas (a análise real), baseada no que denominou "princípio da convergência", onde o conceito de limite é introduzido como um predicado lógico de primeira ordem e aritmético de terceira ordem, definido no domínio dos "números reais"*[7] (grandezas racionais ou não) onde o problema da existência de um processo com uma infinidade de operações sucessivas, como em Eudoxo, parece contornado com o uso de um predicado lógico em seu lugar. Na verdade o problema do infinito foi, como depois se constatou na investigação de "casos patológicos" de convergência, apenas transferido para a construção do domínio sobre o qual tal predicado está sendo definido (os números reais). A esta próxima tarefa, historicamente conhecida como "a aritmetização da análise", dedicam-se algumas mentes brilhantes da geração seguinte, como Dedekind, Weierstrass e Cantor.

Para que esses "números reais" correspondessem a uma desejada abstração generalizante do processo de mensuração no segmento geométrico clássico (*antanairesis*), impunha-se-lhes a ordem total linear. Dedekind resolve de forma habilidosa o desafio, introduzindo o número real x como uma partição própria do conjunto das grandezas racionais*[8] que satisfaça o seguinte predicado de ordenação:

$$x \text{ é número real} \Leftrightarrow_{\text{def.}} \text{"}p/q \in x, \text{"}r/s \in (Q-x)\ [\ p/q < r/s\ ]$$

onde p,q,r,s são inteiros e Q é o conjunto de todas as grandezas racionais p/q. Dedekind chamou tais partições de "cortes" e observou que os números irracionais correspondem exatamente àqueles cortes em que nenhum dos dois conjuntos da partição ($x,Q-x$) possui em si supremo ou ínfimo*[9] .

Imbuídos da atitude crítica que os motivavam, acautelam-se os envolvidos por não terem conseguido evitar, em nenhuma das várias tentativas de fundar a análise na aritmética*[10], confrontos diretos*[11] com a tese aristotélica sobre a natureza potencial do infinito , posição então reconhecida como fonte de potenciais problemas de consistência. Dessas tentativas, a dos cortes de Dedekind foi reconhecidamente a mais simples e engenhosa. Sensibilizado por tal impasse, Cantor passa a questionar os obstáculos históricos que favorecem a tese aristotélica neste confronto, principalmente o axioma fundamental das partes*[12] formulado por Euclides .

Enquanto Galileu e Leibniz, quem podemos considerar como fundador da lógica formal, opinavam que a necessidade de se negar o princípio de que o todo é maior que sua parte, constituía obstáculo à admissibilidade do infinito atual (2: pp 125), Cantor parte precisamente deste ponto, e do impasse na aritmetização da análise, para estabelecer sua teoria de conjuntos, restringindo aos conjuntos finitos (e à ontologia das figuras geométricas) o alcance do axioma fundamental de Euclides, dissipando assim o chamado "paradoxo de Galileu"*[13]. Dedekind, que tanto inspirou e foi inspirado por Cantor, acabou por empregar a própria negação deste axioma como a caracterização de infinitude para conjuntos *atuais* (6: pp 61).

Cantor elabora sua "teoria abstrata dos conjuntos" partindo de uma definição de conjunto*[14] (7: pp 481) que rompe com a restrição aristotélica sobre a forma de ser das infinitudes, mas que logo veremos ser ingênua, prosseguindo com definições operativas sobre conjuntos abstratos das quais a mais importante, para os objetivos deste texto, refere-se ao conceito de "potência", ali despida do sentido categórico que traz da metafísica de Aristotéles, para significar uma medida de grandeza, relativa à existência de correspondência biunívoca entre conjuntos. O conceito de potência em Cantor generaliza o conceito de número como correspondência enumeradora em Aristóteles (2: pp 19) – o "número com que numeramos" (*arithmos monadikos*) – onde a enumeração finita é substituída por uma função biunívoca abstrata entre conjuntos, finitos ou não.

Esta definição de potência para conjuntos revela a Cantor uma notável descoberta e a demonstração de teoremas que introduzem, à luz de suas definições originais, insolúveis inconsistências em sua teoria, conhecidas como as antinomias (ou paradoxos) de Russell, de Cantor, de Burali-Forti, dentre outras, como veremos adiante. Estas descobertas puseram em risco imediato todo o esforço já empenhado para estabelecer a solidez dos fundamentos da matemática moderna e seu avanço, onde as infinidades *atuais* despontavam, desde Leibniz até Frege, Cauchy e Dedekind. Antes de abordarmos as atitudes com que a isso reagiram matemáticos e filósofos envolvidos neste esforço, e as conseqüências de suas reações, convém examinar alguns aspectos da teoria de Cantor, para melhor apreciarmos a ubiqüidade e importância do problema do infinito nos fundamentos da matemática.

A relação de equivalência definida pela existência de bijeção (*atual* ou *potencial*) entre dois conjuntos, estabelece classes de equivalência de conjuntos de mesma potência na teoria de Cantor. Esta relação de equivalência, aplicada a subconjuntos, define uma relação de ordem que se chamou "ordem de dominância", e à classe desta equivalência a que pertence um dado conjunto chamou-se "cardinalidade" do conjunto. Assim, se denotarmos por $|\mathbf{A}|$ a cardinalidade do conjunto **A**, e por "$\leq$" a relação "é dominado por", teremos

$$\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Rightarrow |\mathbf{A}| \leq |\mathbf{B}| .$$

Para conjuntos finitos, a cardinalidade corresponde ao número de distintos elementos que lhes pertencem, e às operações de união disjunta, produto cartesiano e construção de funções sobre conjuntos correspondem, respectivamente, as operações aritméticas de soma, produto e exponenciação de seus cardinais, conforme podemos verificar:

União disjunta: $|\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| = \varnothing \Rightarrow |\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$
Produto cartesiano: $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| . |\mathbf{B}|$
Funções: $|\{f|f:\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}\}| = |\mathbf{A}|\hat{}|\mathbf{B}|$

Cantor usa esta correspondência para definir operações "aritméticas" sobre cardinais (finitos ou não). Aos cardinais com tais operações e ordem de dominância, chamou de aritmética "transfinita", onde podemos, por exemplo, representar o conjunto $P(A)$ das partes de A através das funções características*[15] dos subconjuntos de A para obter

$$|\mathbf{P(A)}| = |\{ f|f:\mathbf{A} \rightarrow \{0,1\}\}| = 2\hat{}|\mathbf{A}| .$$

Sua primeira descoberta importante da aritmética transfinita, e para a época – ainda hoje para alguns – também surpreendente, foi a de que existem distintos cardinais infinitos, os quais eventualmente iriam acusar a ingenuidade da definição primeira de sua teoria.

Ao dar nome $\aleph_0$ a seu cardinal e descrever o conjunto *atual* **N** dos números naturais por meio de chaves e reticências*[16], que sugerem a descrição de uma lista infinita de elementos numa notação que lhe convinha, onde valor semântico de caráter ontológico é atribuído a reticências, e de caráter terminal no processo descritor da unidade de tal lista atribuído à chave que a encerra, Cantor abre, sem perceber, a caixa de Pandora aonde havia aprisionado a tese aristotélica do infinito *em potência*, que dali salta para dentro da sua aritmética transfinita, lugar de onde poderá melhor desafiar-nos!

Os gregos conheciam muito bem o problema do infinito e seus significados para a matemática e a filosofia, e a profundidade filosófica com que o trataram pode ser percebida na discussão que lhe dedica Aristóteles em "Física", um tratado clássico de valor perene nesta questão. Talvez Aristóteles tenha sido privilegiado por ter podido refletir mais vivamente sobre o primeiro impacto sofrido pelo intelecto humano frente aos desafios que tal questão encerra, através do legado pitagórico. Mas nem os gregos, nem os pensadores modernos, recuaram diante das várias faces com que a questão se nos apresentou. Desde os pitagóricos até os contemporâneos e sucedâneos de Cantor na investigação dos fundamentos da matemática, tentou-se decifrá-las; os gregos desenvolveram a teoria das proporções e o método axiomático, e o esforço intelectual de grandes pensadores do século XX nos oferece um arsenal de impressionante complexidade na lógica matemática, na teoria axiomática dos conjuntos, na teoria das categorias, na teoria da prova, na teoria da computação, como também na filosofia da linguagem. Antes de esboçarmos alguns traços históricos sobre a origem destas teorias, cumpre dizer algo sobre a nova silhueta com que se apresentou a Cantor o problema do infinito.

Cantor usou as reticências de sua notação de conjuntos para inventar o "método da diagonalização", onde dispõe uma lista infinita (vertical) de listas infinitas (horizontais), em forma de matriz infinita, limitada por duas bordas adjacentes (esquerda e topo) e aberta nas outras bordas

```
 _______________________________________________  ...
| a[1,1]=0 a[1,2]=1 a[1,3]=3    ..      ..      ..
| a[2,1]=2 a[2,2]=4 a[2,3]=7    ..      ..      ..
| a[3,1]=5 a[3,2]=8 a[3,3]=12   ..      ..      ..
|  ..        ..        ..     a[4,4]    ..      ..
|  ..        ..        ..       ..    a[5,5]    ..
|  ..        ..        ..       ..       ..   a[6,6]
   :
   :
```

Neste seu método, tais matrizes infinitas tem dois usos possíveis. O primeiro uso, que podemos chamar de diagonalização finita, é para auxiliar na descrição de determinada bijeção entre **N** e algum conjunto de mesma potência representado por **N** × **N**. Tais bijeções são obtidas pela enumeração dos sucessivos elementos ocorrentes em cada diagonal finita, pela ordem crescente de tamanho dessas diagonais*[17] (por exemplo, (a[2,1], a[1,2])). O propósito da diagonalização finita é mostrar que diversos conjuntos construídos por produto direto de enumeráveis tem cardinalidade $\aleph_0$ ou, em última instância, determinar o seguinte resultado sobre a operação produto transfinito:

$$\aleph_0 \,.\, \aleph_0 = \aleph_0$$

Conjuntos de cardinalidade $\aleph_0$ são chamados enumeráveis, e uma bijeção entre **N** e um conjunto de cardinalidade $\aleph_0$ é chamado de enumeração. Cantor mostrou a enumerabilidade de vários conjuntos, tais como o conjunto dos números racionais, o conjunto dos números algébricos*[18], o conjunto de subconjuntos finitos destes, e calculou várias outras operações da aritmética transfinita usando a diagonalização finita. Se denotarmos cardinais finitos por n, teremos por exemplo

$$\aleph_0+\aleph_0 = \aleph_0 \ ; \quad n+\aleph_0 = \aleph_0 \ ; \quad n.\aleph_0 = \aleph_0 \ ; \quad \aleph_0\hat{\ }n = \aleph_0$$

O outro possível uso da matriz infinita, que podemos chamar de diagonalização infinita, levou Cantor à sua grande descoberta. É usada quando se deseja verificar a impossibilidade da existência de qualquer bijeção entre $\mathbf{N}$ e algum conjunto que "não caiba na matriz infinita", isto é, de maior potência que $\mathbf{N}$, para mostrar desigualdades entre cardinais. Tais verificações são obtidas supondo-se a matriz preenchida, enumerando-se sucessivos elementos de uma "lista excluída", de forma que esta não possa ocorrer em nenhuma das linhas ou colunas da matriz infinita: percorre-se uma diagonal infinita e inclui-se em tal lista, a cada passo, algum elemento distinto daquele sendo visitado na diagonal infinita. Uma tal lista x pode ser assim descrita:

$$x = \{a'_1,a'_2,a'_3,...\} \ \& \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \ [a'_n \neq a[n,n]\ ]$$

Em 1874 Cantor mostrou que o conjunto $\mathbf{P(N)}$ formado pelos subconjuntos dos números naturais, não pode ser completamente enumerado (1: pp 7): dada qualquer lista $\{S_i|i\in \mathbf{N}\}$ de subconjuntos de $\mathbf{N}$, representados por funções características f_i onde cada f_i ocupa uma linha da matriz, esta lista permitirá descrever um subconjunto S fora da lista

lista: $f_i:\mathbf{N}\rightarrow \{0,1\} \ \& \ [f_i(n)=1 \Leftrightarrow \ n\in S_i \subseteq \mathbf{N}]; \ i = 0,1,2,...$

subconjunto S ausente da lista: $f_S = \{f_1(1)',f_2(2)',f_3(3)',...\}$

concluindo assim, por *modus tolens*, que $\aleph_0 < |\mathbf{P(N)}| = 2\hat{\ }\aleph_0$. Cantor mostrou que o conjunto dos números reais e o conjunto dos números transcendentais têm mesma cardinalidade que o conjunto das partes de $\mathbf{N}$, e posteriormente generalizou esta descoberta para uma descrição de um subconjunto ausente de qualquer bijeção dada entre um conjunto de cardinalidade qualquer e o conjunto de suas partes, obtendo assim o primeiro teorema importante da aritmética cardinal:

Teorema de Cantor: $|\mathbf{A}| < |\mathbf{P(A)}|$ (ou $\aleph < 2\hat{\ }\aleph$)

A definição primeira de Cantor para conjuntos abstratos permite a formação de conjuntos contendo "elementos bem definidos de nosso pensamento" (7: pp 481), o que nos autoriza a definir, por exemplo, o "conjunto universo" $\mathbf{U}$, contendo como elemento qualquer possível conjunto. Cada subconjunto de $\mathbf{U}$ é também um conjunto, e portanto devemos ter $\mathbf{P(U)}\subseteq \mathbf{U}$, o que nos leva, pela aritmética transfinita, diretamente à antinomia conhecida como "paradoxo de Cantor", por ele descoberta em 1899 (1: pp 32)

Relação de dominância: $\mathbf{P(U)} \subseteq \mathbf{U} \Rightarrow |\mathbf{P(U)}| \leq |\mathbf{U}|$

Aplicação do Teorema de Cantor: $|P(U)| > |U|$

A um platônico que examine esta antinomia, ocorrer-lhe-á provavelmente que o acesso ao mundo das idéias e formas perfeitas não se dará impunemente através de linguagem tão livre e descuidada, como aquela na definição primeira da teoria de Cantor, já que, afinal, ao pensamento também podem ocorrer falácias. A um aristotélico convicto, poderá ocorrer a tentação de acusar o emprego da lei *modus tolens* na demonstração do teorema de Cantor, em flagrante violação da tese do infinito *em potência*, como simples dialética, no sentido sofista. Para o espírito crítico que procurar manter-se neutro em relação a estas principais doutrinas do pensamento matemático, há leituras possíveis da antinomia que aprofundam e iluminam ambas as críticas.

Se suspendermos temporariamente nosso julgamento sobre a validade do método empregado para obtê-lo, o teorema de Cantor terá algo a nos dizer. Se a teoria permite conjuntos infinitos *atuais*, não poderá permitir o conjunto *atual* de todos os conjuntos, caso também permita referências ao conjunto das partes de um dado conjunto, algo praticamente inevitável a partir de seu predicado atômico "∈" (pois a parte lógica da teoria seria para isso descaracterizada e sacrificada). O "conjunto universo" ali não faz mesmo sentido, pois mesmo supondo serem todos seus elementos, como pede a definição primeira de Cantor, "objetos bem distinguidos do pensamento" (a teoria seria correta no sentido de "sound"), a coleção dos mesmos, como conjunto, não o será (a teoria não seria mais correta). Sua primeira mensagem diz então que nem toda coleção cujos elementos ocorrem inofensivamente ao pensamento poderão ser admitidas como conjunto na teoria.

Podemos aqui observar que a definição primeira de Cantor impõe condições*[19] sobre elementos, mas nenhuma sobre o atômico e indefinido conceito de "coleção". Se examinarmos também outros paradoxos que surgem na teoria, como o paradoxo de Russell*[20], ficará claro que a teoria deve impor condições também para que uma coleção seja um conjunto. Mas que tipo de condições? Se, por exemplo, banirmos como exceção os conjuntos já conhecidos como paradoxais, já que estes não têm importância prática alguma para o resto da matemática, continuaremos sem nenhuma pista sobre a existência ou não de outras possíveis inconsistências na teoria, exceto pelo desconfortável alerta de que inconsistências de fato nela ocorreram antes das exceções. Por outro lado, o teorema de Cantor implica a existência de cadeias crescentes ilimitadas de cardinais infinitos, decorrentes de sucessivas operações de formação do conjunto das partes do conjunto anterior, iniciadas com um conjunto infinito, como por exemplo o dos números naturais:

$$\aleph_0 < 2\hat{}\aleph_0 < 2\hat{}2\hat{}\aleph_0 < 2\hat{}2\hat{}2\hat{}\aleph_0 \ldots$$

Tendo cercado entre chaves as reticências para tornar *atual* o conjunto dos números naturais, Cantor se depara novamente com o ilimitado na forma de *ente em potência*, pois aqui, o ato simbólico de continuar encerrando reticências entre chaves é punido com a destruição imediata da possível consistência da sua teoria, através do paradoxo de Burali-Forti*[21], que vai inquirir sobre a cardinalidade do conjunto dos cardinais. A segunda mensagem é, portanto, sobre o ressurgimento da tese aristotélica do infinito*[22], desta vez com força aparentemente incontestável, na aritmética transfinita.

A seqüência cardinal do exemplo acima é conceitualmente muito semelhante à seqüência dos números naturais, e portanto a próxima mensagem encerra uma sugestão de estratégia para revisão da teoria proposta por Cantor, com respeito à admissibilidade de coleções como conjuntos; devemos ter cuidado em não permitir conjuntos muito "grandes" que possam ofender a persistente tese aristotélica, o que pode ser alcançado se nela só permitirmos conjuntos construídos ou especificamente introduzidos por operações e leis sensatas da teoria. A terceira mensagem sugere, portanto, uma revisão axiomática construtivista para a teoria dos conjuntos de Cantor, a exemplo da geometria de Euclides.

A partir deste ponto, as questões relacionadas à revisão dos fundamentos da matemática começam a crescer em sutileza e profundidade. A abordagem axiomática construtiva para uma teoria não irá, por si só, garantir que novos paradoxos ainda desconhecidos, não possam dela emergir. Por outro lado, se escolhermos axiomas e operações da teoria excessivamente restritivos, motivados pelo desejo de nela encontrar garantias de consistência, poderíamos estar traçando limites artificiais para o pensamento matemático, já que a teoria dos conjuntos é alicerce para a construção de todas as teorias matemáticas de importância para a ciência contemporânea.

O que fazer? Os pressupostos metafísicos implicados nas possíveis direções a serem seguidas na busca de respostas a tal pergunta, serviu aos historiadores da ciência para classificar, em três escolas, a posição tomada pelos diversos pensadores que decidiram contribuir na sua abordagem.

Logicismo, Intuicionismo e Formalismo

Em referencia ao projeto de uma revisão dos fundamentos da matemática para oferecer-lhe solidez frente ao crescimento vertiginoso que experimentava, e ao se dar conta de sua envergadura e da natureza dos desafios nele envolvidos, Bertrand Russell comentou, com certa ironia, que "a matemática trata de coisas que não sabe o que são, por meio de princípios que não sabe se são verdadeiros ou não". É provável que Russell estivesse externando desta forma também sua perplexidade diante dos níveis crescentes de abstração por ele demandados, frente à situação dos fundamentos, exposta por Cantor.

As fronteiras do pensamento matemático podem ser desenhadas em duas frentes, partindo-se dos campos que dividem, sendo uma delas aquela dos contornos imanentes ao próprio pensamento matemático, revelando por si seus próprios limites, e a outra aquela exposta pelo método filosófico, que investiga os limites do pensar matemático como uma atividade do pensar em geral. Ao abordarmos em seguida as três escolas do pensamento matemático contemporâneo, estaremos percorrendo a frente de onde podem surgir, tanto as marcas de limites auto-revelados, como as conseqüências de limites auto-impostos, e onde o preço para atingi-los e distingui-los está numa crescente abstração de seu formalismo, preço este que, como veremos, nem só a Russell causa perplexidade.

Afinal, qual é a natureza da verdade matemática? Qual o significado de uma proposição matemática, e em que evidências se apoia? Historicamente estas perguntas ocorrem no campo filosófico, mas a crise dos fundamentos atraiu-lhes interesse também de matemáticos preocupados com o cenário pós-Cantor. Até o surgimento da ciência moderna, a distinção entre os dois campos não era muito nítida, sendo a matemática entre os gregos considerada "ciência livre" (*paideia*), e nos primórdios da ciência moderna geralmente considerada parte da "filosofia natural". O interesse dos matemáticos por tais questões, e a especialização crescente de seu trabalho, tem contribuído para a distinção que atualmente experimentam.

Cada um dos paradoxos anteriormente mencionados, e todos então conhecidos na teoria dos conjuntos, envolvem, de alguma forma, definições com uma característica peculiar: o que está sendo definido participa da sua própria definição . Este tipo de definição foi denominada pelos lógicos de "impredicativa"*[23], e Poincaré denunciou-as em 1905 como a causa dos paradoxos, crença que Russell aderiu em 1910 ao anunciar seu "princípio do círculo vicioso" e que implicava, como conseqüência para o projeto dos fundamentos, na eliminação de toda e qualquer definição impredicativa do corpo da matemática.

O *Logicismo* defende a tese de que a matemática é um ramo da lógica, cabendo-lhe assim buscar meios de garantir que as proposições desta estejam livres de definições envolvendo circularidades. A linhagem logicista tem sua origem na *mathesis universalis* de Leibniz, sendo portanto tão antiga quanto a ciência moderna. Quando os paradoxos foram descobertos na teoria dos conjuntos, Dedekind e Frege já estavam envolvidos no esforço de reformulação de conceitos matemáticos em termos de noções lógicas e Peano já havia proposto a representação de teoremas da aritmética em simbolismo lógico, sendo o trabalho de Frege o que maior impacto sofreu em relação à revisão que a descoberta dos paradoxos implicava (1: pp.43).

O obstáculo mais sério ao projeto logicista entretanto, havia sido levantado pelo próprio Dedekind na sua proposta de aritmetização da análise. A definição de supremo e ínfimo em sua construção do conjunto dos números reais, conceitos centrais nos teoremas sobre convergência da análise com os quais estão fundamentadas a teoria das equações diferenciais e as séries de Fourier, e consequentemente boa parte do ferramental da física clássica, refere-se circularmente ao conjunto dos números reais. Weil empenhou-se em livrar, até onde pudesse, a análise real das definições impredicativas, mas o importante teorema sobre a existência de supremo e ínfimo em conjuntos limitados não pôde ser salvo da mácula impredicativa.

Na dedução da matemática a partir da lógica, desenvolvida entre 1910 e 1913 na monumental obra de Russell e Whitehead, "*Principia Mathematica*", uma teoria dos tipos, posteriormente simplificada por Ramsey em 1926, é empregada para barrar a ocorrência de certas definições impredicativas em teorias matemáticas. Aos objetos primordiais referidos por sentenças da lógica é atribuído tipo 0, às sentenças predicativas que se referem apenas a objetos de tipo 0 é atribuído tipo

1, e assim por diante, sendo que as sentenças predicativas admitidas só podem descrever propriedades de objetos de tipo menor que o seu. Assim, a propriedade de uma sentença conter definição impredicativa se refere a propriedades de sentenças, e portanto, estaria fora do escopo da lógica.

A simplificação da teoria dos tipos ramificados dos *Principia* foi motivada pelo fato de que sua admissibilidade de predicados incluir subtipos, referentes à hierarquia de quantificações universais (construções de totalidades), que impediam a representação completa da análise real. Ramsey eliminou os subtipos através de um artifício, e classificou as antinomias em sintáticas*[24] (ou logicas) e semânticas*[25] (ou epistemologicas) de forma que, segundo a tese logicista, antinomias sintáticas seriam evitadas pela hierarquia simplificada de tipos dos predicados admissíveis (que podiam admitir os conceitos da análise real), e antinomias semânticas poderiam ser evitadas impedindo-se que o significado de uma sentença da lógica fizesse referência a si própria.

Entretanto, o projeto logicista não desfrutou de aprovação geral com respeito ao alcance de seus objetivos, mesmo dentre os logicistas. Russell havia introduzido de forma *ad-hoc* nos *Principia* do axioma da redutibilidade*[26] sem nenhum apelo lógico ou intuitivo, cujo único objetivo era assegurar, de forma não construtiva, a existência de sentenças admissíveis que pudessem expressar conceitos como os da análise real*[27] . Para evitar este artifício, Ramsey usou outro, onde, para justificar a admissibilidade de sentenças impredicativas dentro de um dado tipo da hierarquia, pressupõe a existência do conjunto de todos os predicados daquele tipo, independente de sua construtibilidade, definibilidade ou tipo.

A crítica expressa por Weil ao projeto dos *Principia* em relação a suas metas (9: pp.2-13), bem reflete o consenso que eventualmente se formou entre os matemáticos sobre o tema. Weil afirmou que "A matemática não mais está fundada na lógica, mas numa espécie de paraíso dos lógicos", e que caso o caminho para a revisão dos fundamentos exija a crença na existência de algum "mundo transcendental" emanado de axiomas não intuitivos, melhor seria então aceitarmos algum sistema menos pretensioso e mais simples, como a teoria axiomática dos conjuntos de Zermelo & Fraenkel por exemplo, que tenta evitar antinomias introduzindo conjuntos *atuais* infinitos, como o dos números naturais, através de "axiomas existenciais de infinitude", junto com outros axiomas construtivos.

Outra crítica comum ao logicismo questiona a primordialidade da lógica nos fundamentos da matemática, já que algumas idéias aritméticas aparecem embutidas no formalismo lógico*[28], tais como a seqüência ordenada dos números naturais (nos tipos lógicos) e o princípio da indução (nas regras de dedução). A postura crítica mais radical ao logicismo questiona também, e principalmente, as possíveis conseqüências do trajeto percorrido pela lógica desde o contexto em que foi descrita por Aristóteles, até o uso que dela fazem os logicistas. Esta postura crítica ganhou, talvez pela importância de Poincaré, o nome de *Intuicionismo* (ou neo-intuicionismo), havendo seu período de maior influência na revisão dos fundamentos sido exercido entre 1900 e 1931.

O logicismo buscava uma critica positiva da "nova matemática", no sentido de adequá-la aos critérios que julgava suficientes para livrá-la de inconsistências, mas a crítica negativa surgira antes mesmo dos paradoxos, com Gauss*[29]. Também Kroneker, outro precursor do intuicionismo e um dos mais combativos e contundentes críticos da teoria de Cantor e da aritmetização da análise, sustentou durante toda a década posterior a sua divulgação (1880s), que tudo aquilo não passava de "literatura" e nada tinha a ver com matemática, devido ao caráter não construtivo das teorias. Ignorou assim qualquer possível "crise" nos fundamentos da matemática, postura que procurou difundir com o respaldo de seu prestígio*[30]. Esta postura irá voltar à curiosidade da apreciação filosófica com os resultados posteriores de Gentzen e Löwenheim-Skolem, como veremos adiante.

O intuicionismo teve talvez seu defensor mais importante em Brower, que em 1908 publicou seu desafio à crença na validade geral da lógica clássica aristotélica (10). Brower argumenta ser decorrência de uma leitura cuidadosa da história, que a lógica hoje denominada "clássica" e tida como originada em Aristóteles, foi na verdade abstraída da matemática dos conjuntos finitos, que é anterior a Aristóteles. Tendo se esquecido da sua verdadeira origem, os matemáticos a estariam hoje aplicando, sem justificativa, à matemática dos conjuntos infinitos (1: pp.46).

Brower cita dois exemplos acerca do raciocínio sobre conjuntos finitos que se tornam inválidos quando estendidos para conjuntos infinitos, a saber, o axioma das partes de Eudoxo (usado por Dedekind justamente para definir predicativamente o conceito de infinitude para conjuntos) e a existência de elemento máximo em qualquer conjunto de números naturais, como justificativa para apresentar o que considera ser o ponto central da crítica intuicionista à matemática então praticada, inclusive no logicismo: a validade, em domínios infinitos, do axioma lógico conhecido como lei do terceiro excluído $[A \vee \neg A]$, e por conseguinte também da lei *modus tolens*.

A afirmação de que "a conjectura de Goldbach*[31] é verdadeira ou falsa", por exemplo, não é verdadeira e muito menos tautológica para o intuicionista, pois ninguém até hoje obteve evidência ou prova suficiente para decidir nem que a conjectura é verdadeira, nem que é falsa. O pressuposto metafísico básico da tese intuicionista está em ser a matemática entendida como algo que corresponde à parte exata da capacidade humana de pensar (1: pp.51). Neste sentido, o passo de se tomar a lei do terceiro excluído como universalmente válida, independente de considerações de finitude no domínio onde se aplica, é totalmente injustificado. Tal passo torna-se assim o principal suspeito pelos paradoxos que emergiram, e os que poderão emergir, em teorias matemáticas.

O desafio intuicionista ao projeto de revisão dos fundamentos era portanto de caráter muito mais profundo que a proposta logicista; exigia também a revisão dos axiomas e regras lógicas admissíveis, à luz dos efeitos nefastos que se manifestaram com a negação da tese aristotélica do infinito. Este desafio parece ter proporções bem maiores do que o impasse em que chegou o logicismo – imerso na investigação de condições especiais para admissibilidade restrita de proposições impredicativas que pudessem acomodar completamente a análise real – visto que, de todo o corpo de teorias hoje considerado como matemática, só a teoria elementar dos números se enquadraria em suas restrições.

Neste cenário deveras delicado, surge então uma proposta de cunho conciliatório entre a crítica intuicionista e o projeto logicista, inspirada no pressuposto de ser a própria visão platônica necessária para solucionar o impasse a que chegaram os fundamentos, precisamente devido à natureza platonizante da aventura intelectual dos pensadores que aí os conduziram ao contestar ousadamente a visão aristotélica da matemática. Um dos mais brilhantes intelectos do nosso século, David Hilbert resolveu dar mais um passo na direção da "renúncia à essência" mencionada por Bacon, propondo uma nova abordagem ao projeto de revisão dos fundamentos da matemática, através da abstração do método axiomático nela empregado. Seu projeto, que trata axiomatizações de teorias como ohjetos matemáticos, ficou conhecido como o *Formalismo*, de onde eventualmente surge a teoria da computação.

Para melhor entendermos a essência e escopo da proposta formalista, voltaremos por um momento à origem da crítica moderna aos fundamentos da matemática, que antecedeu em mais de um século o surgimento dos paradoxos na teoria dos conjuntos cuja motivação pode ser traçada à discussão entre Newton e Leibniz sobre a natureza e a realidade do espaço. A tradição grega antiga atribui o desenvolvimento do método axiomático a Pitágoras, trazido a nós por Euclides, para quem os axiomas e postulados eram princípios universais claros que podiam ser aceitos por todos como verdadeiros, usados na base de processos dedutivos que constituem tal método. Na crítica moderna iniciada por Saccheri e Lambert, axiomas são transformados em hipóteses, opiniões livres cuja admissibilidade em princípio está sujeita a críticas.

O quinto postulado da geometria de Euclides, que afirma serem duas retas não paralelas no plano convergentes em um ponto, já na antiguidade era considerado menos evidente que os outros, razão pela qual foi buscada pelos gregos, pelos árabes e posteriormente pelos europeus, sua dedução a partir dos outros axiomas da geometria. Esta busca havia sempre falhado, o que motivou aqueles críticos a tentarem mostrar seu caráter elementar, que justificasse seu uso como axioma. Usaram a estratégia de introduzir em seu lugar, como hipótese, axiomas que generalizam ou aparentemente conflitam com o axioma das paralelas*[32], obtendo axiomatizações de geometrias "não-euclideanas" que esperavam reduzir *ad absurdum*, também sem sucesso, à geometria euclideana.

Durante sua tentativa, Lambert percebeu que deveria existir, associada a tais geometrias não euclideanas, uma medida absoluta de comprimento, o que parecia paradoxal mas não era contraditório, já que na geometria euclideana existe uma medida absoluta angular associada ao axioma das paralelas: o ângulo reto. A descoberta de Lambert permitiu o desenvolvimento no século seguinte da geometria hiperbólica por Gauss, Bolyai e Lobatchevski, e da geometria elíptica por Riemann, além de outras ainda mais gerais. Tais geometrias não são menos consistentes do que a geometria euclideana clássica, pois o método axiomático, que em princípio permite a demonstração da consistência relativa entre duas teorias através da interpretação de um modelo de uma em um modelo de outra, os permitiu neste caso*[33].

Entretanto, no caso da teoria dos conjuntos e da polêmica sobre o projeto logicista para a revisão dos fundamentos da matemática, não há teoria axiomática alguma que goze de suficiente confiança entre filósofos e matemáticos para servir de referência com respeito a consistência, estando a ausência de tal referência justamente no centro do impasse, o que para alguns é justificativa suficiente para chamá-lo de crise.

Havendo ou não tais referenciais, haverá sempre algum impacto filosófico a ser absorvido da investigação sobre a consistência dessas teorias. Na crítica à geometria, por exemplo, pela renúncia à essência do que seja a realidade do espaço, o espaço que está nas bases da física e da astronomia, alcançou-se um dos limites imanentes ao pensamento matemático, na compreensão de que a matemática, por si só, não é capaz de decidir sobre a natureza deste espaço, compreensão que permitiu a Einstein apresentar-nos, em 1915, a teoria da relatividade geral, num rompimento bem sucedido com a tradição dogmática euclideana do passado, que não distinguira os conceitos de métrica e de espaço.

Se, como sugeriu Platão, os objetos matemáticos possuem existência real, intermediária entre idéias e coisas sensíveis, e estes objetos nos permitem algum tipo de acesso àquelas a partir destas, então o rigor exigido de nosso raciocínio para este acesso não se impõe necessariamente aos objetos que intermediam tal acesso, sendo portanto plausível que o rompimento de Cantor com a tese aristotélica do infinito tenha também alguma nova compreensão a nos mostrar, se soubermos contemplar corretamente os objetos revelados em conseqüência deste ato (denominados "elementos ideais" por Hilbert). Como parece não haver referencial de consistência viável para objetos ideais que a teoria de Cantor ou Dedekind apontam, resta-nos a estratégia de renunciar à essência da realidade do que se pretende estarem descrevendo, para buscar esta compreensão possível, começando pelas condições imanentes de consistência das teorias onde surgem.

Hilbert apresentou como evidência do bom senso de sua proposta, a aceitação gradual de elementos ideais em várias teorias matemáticas, devido à aparente consistência com que nelas se integram aos "elementos reais", tal como os números imaginários, por exemplo. Nos debates que se seguiram à proposta formalista, diante da recusa de Brower em aceitar plenamente seus argumentos (1: pp.57), Hilbert certa vez comentou, referindo-se às mencionadas críticas de Russell e Weil acerca dos rumos tomados pela revisão dos fundamentos: "ninguém irá nos expulsar do paraíso que Cantor nos legou". Com essa postura firme, aliada a seu prestígio de grande matemático, as expectativas de solução do impasse nos fundamentos se deslocaram gradualmente em direção ao seu projeto, que consistia em se provar a consistência interna das teorias matemáticas importantes usando técnicas para isso desenvolvidas, onde as objeções de Kroneker nada significam.

Na proposta formalista, abandona-se qualquer significado atribuível aos objetos de uma dada teoria axiomatizada (ignoram-se seus possíveis modelos e as queixas de Kroneker), para que esta seja investigada como simples objeto dotado de estrutura sintática, como "teoria-objeto", para elucidar questões tais como sua possível capacidade de derivar inconsistências. Tal investigação deve ser conduzida dentro de uma teoria lógica – esta sim, sujeita às restrições de natureza metafísica levantadas pelos intuicionistas – empregada como "metateoria", onde seria em princípio possível determinar condições internas de consistência da teoria-objeto, isto é, a possibilidade de nela se derivar sentenças com estrutura sintática da forma

$$[A \wedge \neg A].$$

A proposta formalista foi apresentada por Hilbert em 1904, e ganhou ímpeto a partir de 1920 com a contribuição de Bernays, Ackermann, von Neumann e outros. Em 1900 Hilbert havia provado a consistência interna da geometria elementar, e em 1925 Ackermann mostrou a consistência interna da aritmética elementar*[34], usando na metateoria apenas métodos finitários*[35], chamada de "teoria da prova". Buscava-se então, pelos mesmos meios, provas de consistência interna para a teoria elementar dos números*[36], para a análise real, e para a teoria axiomática dos conjuntos de Zermelo & Fraenkel, quando em 1930 Kurt Gödel promoveu uma guinada radical nos rumos do projeto formalista, ao publicar seus dois famosos teoremas de incompletude, que apontavam novos limites auto-revelados na natureza do pensamento matemático, relativos ao uso do método axiomático.

É razoável supor que o purismo platônico de Gödel o inclinara a crer que objetos matemáticos, como as teorias axiomáticas, não podem sempre descrever completamente as "idéias perfeitas" que apontam, o que o leavaria a questionar também a possibilidade de sucesso para os planos traçados por Hilbert. Achava que teorias axiomáticas consistentes e relativamente ricas podem não ser completas, no sentido de não poderem produzir demonstrações de sentenças que serão necessariamente verdadeiras em todos os seus possíveis modelos. As dificuldades que os formalistas vinham encontrando em provar a consistência interna das teorias mais importantes da matemática corroboravam sua crença.

Dedicou-se assim a buscar uma prova finitária do que acreditava, e a abordagem escolhida foi a de investigar alguma forma em que poderia falhar a proposta de Ramsey para se evitarem antinomias semânticas em uma teoria. Ramsey havia sugerido que para isso as teorias axiomáticas deveriam evitar a construção de sentenças auto-referentes. No formalismo, Gödel estava em posição privilegiada para conduzir sua abordagem, pois podia supor que significados de sentenças em uma dada teoria axiomática estão restritos *a priori* apenas pela sua sintaxe, e poderia assim nelas procurar uma construção sintática que produzisse, em interpretações possíveis, um conflito entre sua consistência e sua demonstrabilidade. Gödel já conhecia fora do formalismo, na linguagem natural, uma antinomia semântica com esta característica, no paradoxo de Richard*[37]. Sua busca reduzia-se portanto à tarefa de encontrar uma teoria axiomática da matemática onde coubesse sintaticamente uma descrição do paradoxo de Richard.

Gödel achou a teoria-objeto que buscava dentre as teorias dos números. Deu-lhe o nome S, e elaborou um esquema para representar cada sentença da metateoria por um objeto elementar de S (como um número natural), traduzindo para S a sentença que descreve na metateoria o predicado "A é demonstração de B em S" para construir, inspirado na diagonalização infinita de Cantor, uma sentença "richardiana" de S, tal que a interpretação de seus elementos na metateoria atribui-lhe o seguinte significado: "Não existe sentença em S que seja demonstração de 'mim mesma'". Tal construção e interpretação são possíveis e corretas por três razões: A primeira é a constatação de que toda a parte lógica de S está "duplicada" na metateoria. A segunda é que a estrutura comutativa e distributiva*[38] da multiplicação na soma dos números naturais permite representar a metateoria numa teoria-objeto que descreve tal estrutura. A terceira é o fato, demonstrado por Gödel, do predicado de S que significa "demonstrabilidade em S" ser verificável por métodos estritamente finitistas, e portanto, reinterpretável na metateoria. O primeiro teorema de incompletude da teoria axiomática elementar de **N** diz, pois, que, se S for consistente, nem tal sentença nem sua negação são demonstráveis em S.

Em seu segundo teorema, Gödel provou que S não pode deduzir sua própria consistência, pois uma tal demonstração poderia ser traduzida, via metateoria, para uma demonstração em S da sentença richardiana, concluindo portanto que o sistema lógico para a matemática proposto por Russell e Whitehead é incompleto, e que a proposta de Hilbert para se resolver o impasse nos fundamentos da matemática é inalcançável. Que tipo de compreensão pode-se então extrair do legado de Gödel? Uma questão técnica, que logo atraiu os pensadores envolvidos, diz respeito aos efeitos da escolha dos métodos dedutivos admissíveis para uma teoria no seu poder de alcance, quer como teoria da prova, quer como teoria-objeto, ou na relação de uma com outra. Uma questão metafísica, que chama a atenção por si mesma, diz respeito à natureza da verdade matemática.

Teoria da Computação e Filosofia

No sentido estrito da verificação de predicados e do cálculo simbólico de funções, a questão sobre a escolha de métodos dedutivos que sejam admissíveis para automatização finitária e realização física (isto é, que sejam "computáveis"), destacou-se da investigação dos fundamentos da matemática para constituir o corpo de conhecimentos hoje denominado teoria da Computação. Esta, por sua vez, ramificou-se em várias áreas, determinadas pelos diferentes enfoques necessários à evolução da tecnologia dela decorrente, tais como a teoria da complexidade, a teoria dos circuitos, a análise de algoritmos, dentre outras. Curiosamente, o ramo mais teórico desta ciência evoluiu para um cenário que invoca e conecta questões metafísicas desveladas na sua origem, como indica a tese de Church.

Church percebeu serem equivalentes todas as propostas para definir o conceito de calculabilidade ou computabilidade, que daí emergiram por abordagens operacionais, lógicas ou linguísticas*[39], no sentido de que descrevem exatamente os mesmos predicados e funções. Decidiu então em 1936 extrair desta observação uma hipótese de natureza metafísica sobre a universalidade daquele conceito, que ficou conhecida como a "tese de Church", e que afirma serem equivalentes à definição lógica de recursividade quaisquer possíveis definições finitárias de calculabilidade, computabilidade ou enumeralabilidade.

Embora equivalentes, cada tipo de abordagem a tal conceito tem sua utilidade prática na ciência da computação. A abordagem operacional de Turing, por exemplo, permitiu a von Neumann elaborar um modelo para construção de máquinas digitais, usado até hoje como padrão para projetos de computadores eletrônicos. A abordagem linguística de Chomski permitiu o desenvolvimento de teorias para concepção de linguagens de programação que se aproximam da linguagem natural, buscando imitar da melhor forma possível os modelos mentais dos programadores, além de técnicas para tradução automática de suas construções para linguagens de máquina. A abordagem lógica permitiu-nos conhecer a indecidibilidade*[40] de certos predicados, que estarão sempre fora do completo alcance da computação, e também da natureza lógica dos mais difíceis problemas da teoria, como por exemplo, a relação entre complexidade e paralelismo computacional em algoritmos*[41].

Em suas várias interfaces com outras ciências, a Computação tem aberto passagem, principalmente através da lógica matemática, para que certas questões filosóficas perenes ressurjam em novas formas e possam ser abordadas por novos ângulos, como por exemplo, a relação empírica entre o problema da representação do mundo levantado por Kant e o conceito de inteligência. Numa digressão sobre o possível conceito finitário de "inteligência", Turing nos convida, já em 1936, à reflexão sobre esta relação. O problema filosófico mais dramaticamente ligado à teoria da Computação talvez seja ainda aquele em sua gênesis, pois a abordagem à questão do infinito oculta ou revela detalhes de outros problemas que em torno dela gravitam, como pode ilustrar a leitura atenta dos textos contemporâneos do formalismo (1) ou da filosofia da linguagem (5).

Gödel mostrou que também a teoria dos conjuntos de Zermelo & Fraenkel não pode provar sua própria consistência. Seus resultados proíbem uma conciliação simplista entre as visões de Platão e Aristóteles sobre a natureza da matemática, ao mostrarem que esta não deve ser apenas sintaxe. A abordagem finitária do conceito de verdade, inaugurada por Tarski, foi útil à lógica matemática para explorar as conseqüências da guinada sofrida pelo formalismo, mas não o será à Lingüistica, pois contorna toscamente a questão do infinito na sua compreensão de mundo pela imersão do conceito de verdade na sintaxe, justificada por suas possibilidades de representação da metalinguagem. Este ato dissolve limitações de significação em uma hierarquia de metalinguagens na matemática, onde a semântica poderia em princípio ser construída sobre o conceito de "verdade", como sugeriu Frege, mas empobreceria necessariamente a semântica imprecisa das linguagens naturais, com seus significados paralelos e intercomunicantes (11).

Finalmente, três resultados do formalismo dentre os mais recentes compõem nuanças do quadro sobre os fundamentos que corroboram a opinião de que a razão humana é mal equipada para, por si só, delinear a natureza do pensamento matemático:

1- Em 1938 Gentzen demonstrou que, abdicando-se das restrições finitárias e admitindo-se o processo de indução transfinita na teoria dos números, sua consistência interna pode ser demonstrada.

2- Em 1940 Gödel mostrou que para axiomatizações finitárias consistentes da teoria dos números, o predicado "demonstrabilidade" é indecidível (1: pp.437).
3- Pelo teorema de Löewenhein-Skolem de 1915, qualquer modelo da teoria axiomática dos conjuntos de Zermelo-Frenkel, caso exista, implicará na existência de um modelo enumerável.

Parece que a razão não pode ultrapassar o enumerável, mas que a crença na existência do não enumerável é um ato de fé compatível com os limites da razão, que nos leva a apreender o significado de todo o edifício do conhecimento matemático em cores e formas distintas do que se nos apresenta caso recusemos este ato. Como Aristóteles, de quem herdamos este edifício, não elaborou uma teoria do significado (há controvérsias sobre a dedução das Categorias em Aristóteles) (11: pp 17-24), pois buscava encontrar na metafísica os elementos de uma teoria do objeto (conforme se queixa Tugendhat) (12: p.53), pouco podemos buscar do legado da filosofia clássica para iluminar esta nova questão.

Bibliografia

1- Kleene, Stephen C.: "Introduction to Metamathematics". Ed. North Holland, 1952.

2- Beker, Oskar: "O Pensamento Matemático" (trad. H. Simon). Ed. Herder, S Paulo, 1965.

3- Zenão de Eléia: Fragm. B1, A25-26 (Diels). Relatos sobre os argumentos "Dicotomia" e "Aquiles". Apud Beker (2)

4- Kant, Immanuel.: "Kritik der reinen Vernunft", 2 ed. Apud Beker (2)

5- Habermas, Jurgen.: "Pensamento Pós-metafísico. Estudos Filosóficos" (trad. F. Seibeneichler) Ed. Tempo Brasileiro, 1990.

6- Halmos, Paul. "Naive Set Theory". Springer-Verlag, 1974.

7- Cantor, Georg: "Beitrague zur Begundrung der transfiniten Mengenlehre", em "Matematische Annalen" vol 45, 1895. Apud Kleene (1)

8- Poincaré, Henri: "The foundations of Science" (trad. B. Halstead) Ed. The Science Press, NY, 1913.

9- Weyl, Hermann: "Mathematics and Logic. A survey for a preface to a reveiw of 'The Philosophy of Bertrand Russell'". American math. monthly, v 53, 1946. Apud Kleene(1)

10- Brower, L.: "De onbetrouwbaarheid der logishe principes" (The untrustworthyness of classical logic) Tijdschrift voor wijsbegeerte, vol 2, 1908. Apud Kleene (1)

11- da Mata, J. V. T.: "Categorias" Ed. Univ. Federal de Goiás, 2005

12- Brito, A. & Vale, O.: (org.) "Filosofia, Linguistica e Informática" Ed. Univ. Federal de Goiás, 1998

Notas de fim de página

1- Palestra apresentada no seminário de filosofia do Departamento de Filosofia da Universidade de Brasília em 8/02/1999

[voltar]

2- Dicotomia de Zenão: $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^n + ...$
[termo dicotômico é a metade do anterior; soma dos n primeiros termos $= (2^n-1)/2^n < 1$]

[voltar]

3- Série harmônica: $1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8)+ ... + 1/n + ...$
[a soma parcial entre termos dicotômicos $> 1/2$; soma dos n primeiros termos $> \log_e(n)$]

[voltar]

4- Parmênides: "Aquilo a que se pode aplicar medidas maiores e menores, tem uma medida exata, que está entre ambas"

[voltar]

5- Galileu Galilei em "Il Sagiattore": "O livro do universo está escrito em linguagem matemática."

[voltar]

6- H. Poincaré demonstrou, em 1900, a impossibilidade de se resolver, de forma exata, o sistema de equações gravitacionais para três corpos (o problema dos três corpos)

[voltar]

7-Limite $_{x \to a} f(x) = c \Leftrightarrow_{\text{def.}} \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \; \forall x \; [\; |x-a| < d \Rightarrow |f(x)-c| < \varepsilon \;]$

[voltar]

8- Frações entre dois números inteiros, relacionadas a antanairesis finitas.

[voltar]

9-Supremo é o menor dentre os limitantes superiores, e Ínfimo o maior dentre os limitantes inferiores. Um exemplo de corte irracional: $\sqrt{2} = \{ p/q \mid p2 < 2q2 \}$.

[voltar]

10- O termo "aritmetização" se deve à cláusula predicativa dos cortes ser equivalente a $[p.s < p.q]$.

[voltar]

11-Uma partição só será corte de Dedekind se estabelecer ou dispuser sobre a pertinência de todos os racionais.

[voltar]

12- Axioma fundamental de Euclides: "O todo é maior que sua parte".

[voltar]

13- Concebido como atual (acabado), o conjunto dos naturais pode ser posto em correspondência biunívoca com seu subconjunto dos números pares, sendo este, pois, de mesmo "tamanho" que aquele, no mesmo sentido em que a medida inteira (*arithmos*) enumeradora (*ararisko*) opera em conjuntos finitos.

[voltar]

14- Cantor: "By a 'set' we understand any collection M of definite well-distinguished objects m of our perception or our thougnt (which we call elements of M) into a whole". (2: pp.9)

[voltar]

15- Função característica para subconjuntos:

$\forall\ S \subseteq A\ [S \leftrightarrow f_S]$ onde $f_S : A \rightarrow \{0,1\}\ \&\ [f_S(a)=1 \Leftrightarrow a \in S]$

[voltar]

16- Os números naturais: $N = \{0,1,2,3,...\}$

[voltar]

17- Na matriz infinita acima, os valores que aparecem para alguns elementos das listas, correspondem aos primeiros índices de uma das possíveis emumerações pelo método da diagonalização finita.

[voltar]

18- Os números algébricos são números reais que são raízes de algum polinômio com coeficientes inteiros, e os números transcedentais são os reais que não são raízes de nenhum tal polinômio.

$\sqrt{2}$ e $3/5$ são números algébricos, pois são raizes de $x^2-2=0$ e $5x-3=0$ respectivamente;

π = diâmetro da circunferência de raio unitário, e

e = Limite $_{h \rightarrow 0}(1+1/h)^h$ (a constante neperiana), são números transcendentais

[voltar]

19- Elementos de conjuntos em Cantor devem ser "bem distinguidos da percepção ou do pensamento"

[voltar]

20- Paradoxo de Russell, publicado por Frege em 1902:

dado $W = \{x | x \notin x\}$ então $W \in W \Leftrightarrow W \notin W$

[voltar]

21- O paradoxo de Burlati-Forti se refere ao conjunto dos ordinais, no qual os cardinais estariam incluídos.

[voltar]

22- Aristóteles sustenta que a essência do infinito está em um processo que se pode levar adiante sem fim, que tem o seu ser únicamente na forma de possibilidade, *secundo potentiam* (2: pp.113).

[voltar]

23- Definições impredicativas em paradoxos: No paradoxo de Russell W é o conjunto dos conjuntos que não pertencem a si mesmos, e no paradoxo de Cantor, U é o conjunto das coleções que são conjuntos.

[voltar]

24- Os paradoxos de Cantor, Russell e Burali-Forti são antinomias sintáticas.

[voltar]

25-Paradoxo de Epimênides: "Os cretenses só dizem mentiras" é antinomia semântica se proferida por um cretense.

[voltar]

26- Axioma da Redutibilidade: Para toda propriedade de subtipo > 0 existe propriedade coextensiva de subtipo = 0

[voltar]

27- As formas intuitivas e conhecidas de certas definições da análise real violam a hierarquia de subtipos dos *Principia* por conterem referências circulares a conjuntos que definem.

[voltar]

28- No X Congresso Internacional de Matemática em Paris, em 1900, Poincaré apresenta o trabalho "*Du role de l'intuition et de la logique en mathématiques*" onde defende a tese do princípio da indução como ferramenta irredutível da intuição matemática, e críticas posteriormente desenvolvidas em (8).

[voltar]

29- Gauss, em 1831: "protesto ... contra o uso de infinitudes como algo completo, o que nunca é permissível na matemática" (1: pp.48)

[voltar]

30- Biografias de Cantor são escassas, mas no material disponível na WWW, podemos encontrar referências ao caráter abrangente da crítica promovida contra ele por Kroneker, procurando influenciar para que seus artigos não fossem publicados em revistas respeitadas e para que seu nome fosse recusado em cátedras de Universidades alemãs. Há inclusive insinuações de uma possível relação entre sucessivas crises depressivas de Cantor e a perseguição pessoal que lhe moveu Kroneker, a quem é atribuído a sentença "Deus criou os números naturais, tudo o mais é produto do homem."

[voltar]

31- C. Goldbach (1690-1764) conjecturou que todo número par é igual a soma de dois números primos

[voltar]

32- Axiomas que implicavam a existência de infinitas ou de nenhuma paralela a uma dada reta, passando por um ponto do plano a ela não incidente.

[voltar]

33- O "plano hiperbólico" é interpretado no espaço tridimensional euclideano por uma superfície denominada parabolóide hiperbólico, e o "plano elíptico" interpretado no espaço quadridimencional por uma superfície semelhante à esfera, de curvatura constante porém negativa.

[voltar]

34- Formalismo contendo símbolos para "números naturais" e apenas uma operação diádica, interpretável como a adição.

[voltar]

35- Em alemão: *finit*, neologismo criado por Hilbert para se referir a métodos e construções imunes à crítica intuicionista.

[voltar]

36- Formalismo que inclui na aritmética elementar mais um símbolo diádico para operação distributiva sobre a "soma", interpretável como a multiplicação.

[voltar]

37- "O menor número natural não nomeável com menos de vinte e sete sílabas" é uma expressão que nomeia, com vinte e seis sílabas, um número natural que, por definição, não pode ser nomeado com menos de vinte e sete sílabas. É paradoxal se não distinguirmos linguagem de metalinguagem (paradoxo de Richard).

[voltar]

38- A enumeração de Gödel usa a propriedade da fatoração única de inteiros em potências de primos (há infinitos primos), para representar seqüências finitas de símbolos da metateoria (há

infinitos símbolos) fazendo corresponder a cada símbolo da seqüência um expoente da fatoração (1: pp.204-216).
[voltar]

39- Respectivamente as máquinas de Turing, o l-cálculo e as funções recursivas, as gramáticas gerativas de Chomski e os sistemas de Post, sendo Church o autor de algumas das demonstrações de equivalência.
[voltar]

40- Um predicado é decidível se ele e seu complementar forem ambos calculáveis (se seus valores forem enumeráveis). A propriedade de uma máquina de Turing sempre finalizar qualquer cálculo submetido, é um exemplo de predicado calculável mas indecidível das máquinas de Turing.

[voltar]

41- Por exemplo, o famoso problema acerca das classes de complexidade P e NP serem ou não iguais.
[voltar]

Sobre o autor

Pedro Antonio Dourado de Rezende é Avanced to candidacy for PhD em Matemática Aplicada na Universidade da Califórnia em Berkeley, Mestre e Doutorando em Matemática e professor do Departamento de Ciência da Computação da Universidade de Brasília

Histórico deste documento

v1.0- fev 1999
v1.1- mai 2004, revisão para publicação em formato pdf.
v1.2 - mar 2007, revisão para inclusão de referência ao item 11 da bibliografia.