Roteiro da Aula 4

1. Expressões Regulares
   - Exemplos e exercícios
   - Equivalência AFN/Expressões Regulares
2. Situação Atual
3. Linguagens não-regulares
   - Pumping Lemma
4. Discussões

Operações regulares – Semântica

Seja Σ um alfabeto e L, L_1 e L_2 linguagens sobre Σ:

- União: $L_1 \cup L_2 = \{x \mid x \in L_1 \text{ ou } x \in L_2\}$;
- Concatenação: $L_1L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \text{ e } y \in L_2\}$;
  - Se $L_1 = \{00, 01, 10, 11\}$ e $L_2 = \emptyset$, quem é L_1L_2?
  - Por definição: $L^1 = L$, $L^2 = LL$, $L^3 = LLL$, $\ldots$;
    - e $L^0 = \{\varepsilon\}$;
- Kleene closure: $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$.

Exemplos

- $L_1 = \{\texttt{bad}, \texttt{good}\}$ e $L_2 = \{\texttt{boy}, \texttt{girl}\}$:
  - $L_1L_2 = \{\texttt{badgirl}, \texttt{badboy}, \texttt{goodgirl}, \texttt{goodboy}\}$;
- $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$;
- $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$;

Expressões Regulares

São expressões (seqüências de símbolos), definidas recursivamente, que representam linguagens sobre um alfabeto Σ

Expressões Regulares

Expressão regular	representa a linguagem
$\emptyset$	vazia
ε	$\{\varepsilon\}$
$\boldsymbol{a}$	$\{a\}$, para cada $a \in \Sigma$
$(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s})$	$R \cup S$
$(\boldsymbol{r}\boldsymbol{s})$	RS
$(\boldsymbol{r}^*)$	R^*

onde $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são expressões regulares representando as linguagens R e S

Exemplos

Se $\Sigma = \{0, 1\}$:

- $(\mathbf{0} + \mathbf{1})^*$;
- $((\mathbf{0}(\mathbf{1}^*)) + \mathbf{0})$;
  - abreviando como $\mathbf{01}^* + \mathbf{0}$;
  - * precede concatenação, que precede $+$;
- $(\mathbf{0} + \mathbf{1})^* 1 (\mathbf{0} + \mathbf{1})(\mathbf{0} + \mathbf{1})$;
- $\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}^*$ é abreviado como $\boldsymbol{r}^+$;

Usamos $\mathcal{L}(\boldsymbol{r})$ para denotar a linguagem representada pela expressão regular $\boldsymbol{r}$.

Exercícios

Escreva expressões regulares para as seguintes linguagens sobre $\{0, 1\}$:

- as palavras que têm exatamente um 1;
- as palavras que têm pelo menos um 1;
- as palavras que têm tamanho par;
- as palavras que começam e terminam com o mesmo símbolo;
- as palavras que têm um número par de 0's e de 1's.

Equivalência entre AFN e Exp. Reg.

Teorema

Para toda expressão regular $\boldsymbol{r}$, existe AFN A, tal que $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\boldsymbol{r})$.

Não veremos a recíproca desse teorema, mas...

Linguagem Regular

Uma linguagem $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ é Regular se existe uma expressão regular $\boldsymbol{r}$ tal que $\mathcal{L}(\boldsymbol{r}) = \mathcal{L}$.

Intuição sobre o Teorema

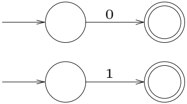
$(0+1)^*10$

Intuição sobre o Teorema

$(0+1)^*10$

0

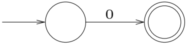
1



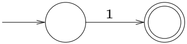
Intuição sobre o Teorema

$(0+1)^*10$

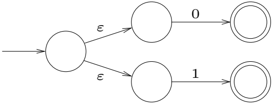
0



1



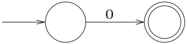
$(0+1)$



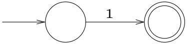
Intuição sobre o Teorema

$(0+1)^*10$

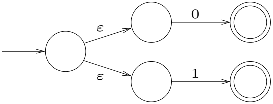
0



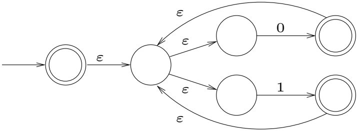
1



$(0+1)$



$(0+1)^*$



Intuição sobre o Teorema

$(0+1)^*10$

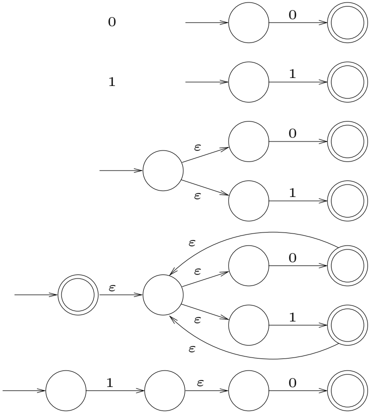
0

1

$(0+1)$

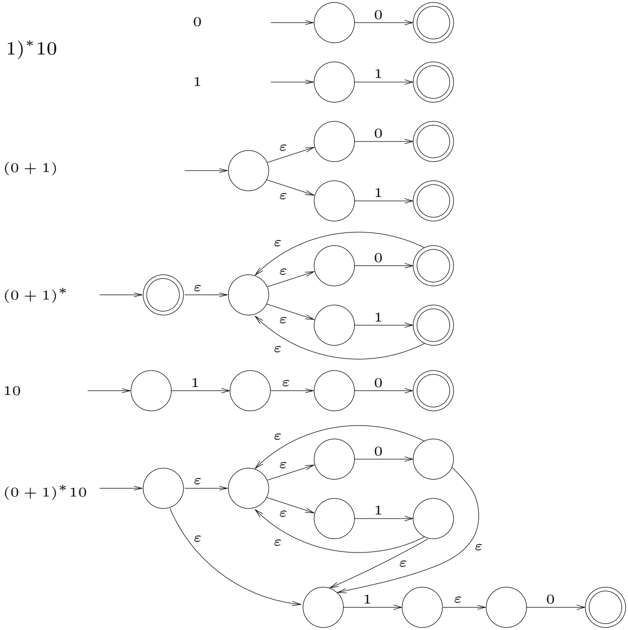
$(0+1)^*$

10

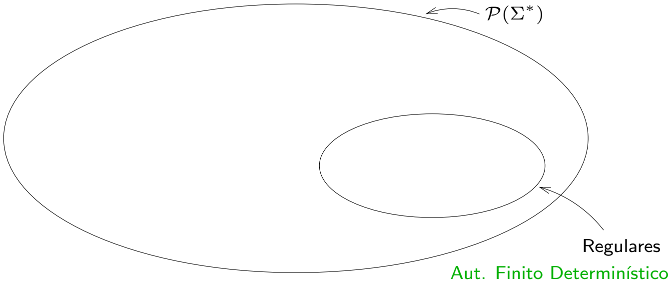


Intuição sobre o Teorema

$(0+1)^*10$



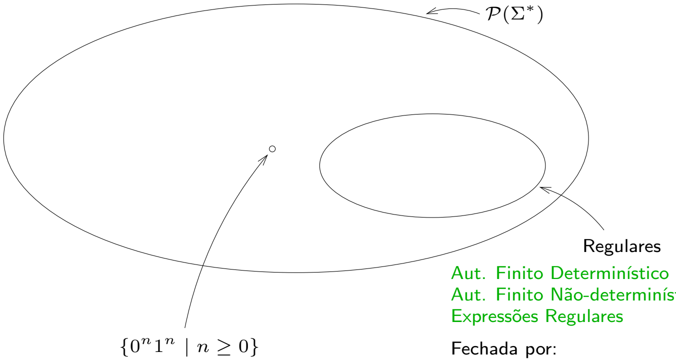
Situação Atual



Aut. Finito Determinístico
Aut. Finito Não-determinístico
Expressões Regulares

Fechada por:
Complementação
União
Interseção

Situação Atual

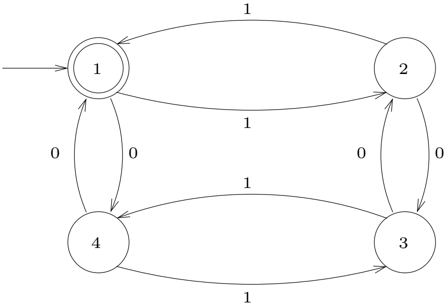


Aut. Finito Determinístico
Aut. Finito Não-determinístico
Expressões Regulares

Fechada por:
Complementação
União
Interseção

O autômato é Finito!

$$\mathcal{L} = \{w \mid \# \text{ de } 1\text{'s e } \# \text{ de } 0\text{'s é par}\}$$



o que acontece se $|w| > 4$?

Pumping Lemma

Pumping Lemma

- Para toda linguagem regular $\mathcal{L}$;
- Existe $p \in \mathbb{N}$; tal que
- Para toda palavra $w \in \mathcal{L}$, $|w| \geq p$;
- Existe x, y, z:
  - $w = xyz$;
  - $|xy| \leq p$;
  - $|y| \geq 1$; tal que
- Para todo $i \geq 0$, $xy^iz \in \mathcal{L}$.

Roteiro
Expressões Regulares
Situação Atual
Linguagens não-regulares
Pumping Lemma
Discussões

Pumping Lemma

Pumping Lemma

- Para toda linguagem regular $\mathcal{L}$;
- Existe $p \in \mathbb{N}$; tal que
- Para toda palavra $w \in \mathcal{L}$, $|w| \geq p$;
- Existe x, y, z:
  - $w = xyz$;
  - $|xy| \leq p$;
  - $|y| \geq 1$; tal que
- Para todo $i \geq 0$, $xy^iz \in \mathcal{L}$.

Se $\mathcal{L}$ é regular $\Longrightarrow$ vale o PL para $\mathcal{L}$

$\downarrow$ contrapositiva

Se não vale o PL para $\mathcal{L}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{L}$ não é regular

Aplicando o PL

Se não vale o PL para $\mathcal{L}$

- Para todo $p \in \mathbb{N}$;
- Existe palavra $w \in \mathcal{L}$, $|w| \geq p$; tal que
- Para todo x, y, z:
  - $w = xyz$;
  - $|xy| \leq p$;
  - $|y| \geq 1$;
- Existe $i \geq 0$, tal que $xy^iz \notin \mathcal{L}$.

Aplicando o PL

Se não vale o PL para $\mathcal{L}$

- Para todo $p \in \mathbb{N}$;
- Existe palavra $w \in \mathcal{L}$, $|w| \geq p$; tal que
- Para todo x, y, z:
  - $w = xyz$;
  - $|xy| \leq p$;
  - $|y| \geq 1$;
- Existe $i \geq 0$, tal que $xy^iz \notin \mathcal{L}$.

Vamos mostrar que $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ não é regular...

Discussões

A memória é finita!

- Em teoria, em princípio, um PC típico é um AFD;
- Há um número finito de possíveis estados num PC;

$f(n) = 2n$ não é, em princípio, regular!

- Uma formalização razoável seria semelhante a:
  - $\{0^n 1^{2n} \mid n \geq 0\}$;
- que não é regular!

e $f(n) = n$, é regular?