Roteiro da Aula 16

1. Notação Assintótica
   - Cota superior: $f(n) = O(g(n))$
   - Cota inferior: $f(n) = \Omega(g(n))$
   - Equivalência assintótica: $f(n) = \Theta(g(n))$
   - Crescimento estritamente menor: $f(n) = o(g(n))$
   - Crescimento estritamente maior: $f(n) = \omega(g(n))$
2. Ordenação por crescimento assintótico
   - Polinômios e Exponenciais

Notação Assintótica

- A notação assintótica dá informação sobre a relação de crescimento assintótico (quando $n \to \infty$) para duas funções:
  - $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$);
- Consideraremos apenas funções que, a partir de certo ponto, são monotonicamente crescentes:
  - $\exists n_c [n_c \leq n \leq m \Rightarrow f(n) \leq f(m)]$;

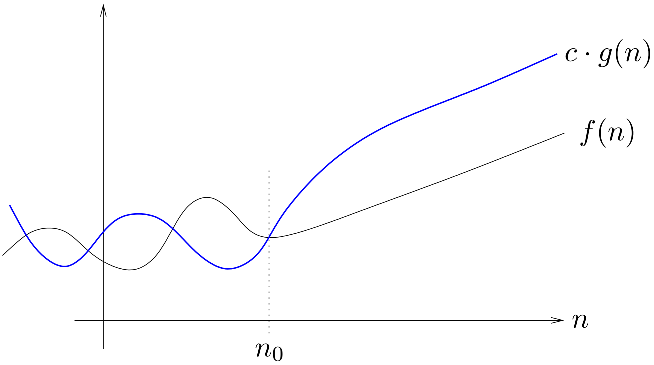
Não faz muito sentido um algoritmo cuja função de custo de tempo de pior caso é

$$f(n) = \frac{n}{2} \cdot \cos(n) + |\frac{n}{2} \cdot \cos(n)|$$

Cota superior

$f(n) = O(g(n))$

Sse existem constantes $c > 0$ e $n_0 > 0$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale $f(n) \leq c \cdot g(n)$.



Cota superior

Exemplos

- $\frac{n^2}{2} + n + 2 = O(n^2)$;
  - Pois para $c = 1$ e $n_0 = 4$:

$$\frac{n^2}{2} + n + 2 \leq 1 \cdot n^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2}$$

$$n + 2 \leq \frac{n^2}{2}$$

vale claramente para todo $n \geq 4$

Cota superior

Também vale:

- $n^2 = O(\frac{n^2}{2} + n + 2)$;
  - Pois para $c = 4$ e $n_0 = 2$:

$$n^2 \leq 4 \cdot (\frac{n^2}{2} + n + 2)$$
$$n^2 \leq n^2 + n^2 + 4n + 8$$
$$1 \leq n^2 + 4n + 8$$

vale claramente para todo $n \geq 2$

Cota superior

Exemplos

- $n^2 = O(n^3)$;
  - Pois para $c = 1$ e $n_0 = 1$:

$$n^2 \leq 1 \cdot n^3 = n^2 \cdot n$$
$$1 \leq n$$

vale claramente para todo $n \geq 1$

Mas

- $n^3 \neq O(n^2)$.

Cota superior

Exercícios

- Mostre que $2^{n+1} = O(2^n)$;
- $2^n = O(n!)$?
- $\log n$ e $\sqrt{n}$: quem é O(de quem)?

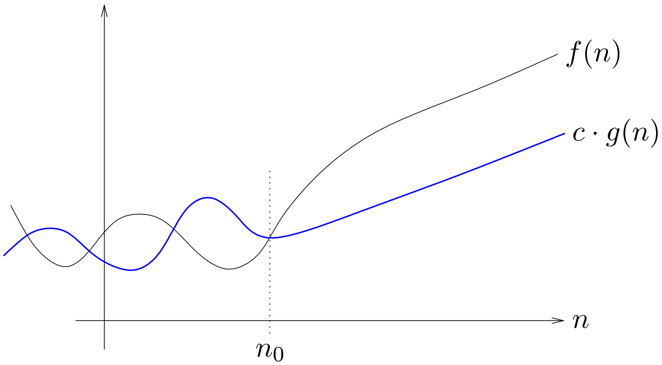
Identidades úteis:

- $a = b^{\log_b(a)}$;
- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$;
- $\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$;
- $a^{\log_b(n)} = n^{\log_b(a)}$

Cota inferior

$f(n) = \Omega(g(n))$

Sse existem constantes $c > 0$ e $n_0 > 0$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale $f(n) \geq c \cdot g(n)$.



Implicações

- Se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$, então $f(n) = O(h(n))$;
- Se $f(n) = O(g(n))$, então $g(n) = \Omega(f(n))$.

$f(n) = \Omega(g(n))$

Sse $g(n) = O(f(n))$.

Equivalência Assintótica

$f(n) = \Theta(g(n))$

Sse $f(n) = O(g(n))$ e $f(n) = \Omega(g(n))$.

O conceito intuitivo é:

$f(n) = O(g(n))$	f tem crescimento assintótico $\leq$ que g
$f(n) = \Omega(g(n))$	f tem crescimento assintótico $\geq$ que g
$f(n) = \Theta(g(n))$	f e g têm o mesmo crescimento assintótico

Crescimento estritamente menor

$f(n) = o(g(n))$

Sse para qualquer constante $c > 0$, existe uma constante n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ vale $f(n) < c \cdot g(n)$.

$f(n) = o(g(n))$

Sse $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Crescimento estritamente menor

Exemplo

- $n \log n = o(n^2)$;
    - Pois:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

Implicações

- Se $f(n) = o(g(n))$, então $f(n) = O(g(n))$;
- Se $f(n) = o(g(n))$, então $f(n) \neq \Omega(g(n))$.
- Se $f(n) = o(g(n))$, então $f(n) \neq \Theta(g(n))$.

Crescimento estritamente maior

$f(n) = \omega(g(n))$

Sse para qualquer constante $c > 0$, existe uma constante n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ vale $c \cdot g(n) < f(n)$.

$f(n) = \omega(g(n))$

Sse $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

Crescimento estritamente maior

$f(n) = \omega(g(n))$

Sse $g(n) = o(f(n))$.

Exemplo

- $n^2 = \omega(n \log n)$.

Ordenação por crescimento assintótico

- Indexar as seguintes funções, $f_1, f_2, \ldots,$ tal que $f_i = o(f_{i+1})$, para todo i:

$$2^n, \quad n, \quad n \log n, \quad \frac{n}{\log n}, \quad n!, \quad n^2, \quad n^3$$

$$\sqrt{n}, \quad n^2 \log n, \quad 3^n, \quad n^n, \quad \log n, \quad 5$$

Polinômios e Exponenciais

- Qualquer exponencial cresce mais rápido assintoticamente do que qualquer polinomial:
- Ex.: $n^{1000000} = o(1.00001^n)$

Em geral

Para quaisquer constantes reais a e b, tal que $a > 1$:

$$n^b = o(a^n)$$

Pois

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$$

Qual é a relação assintótica?

entre $n \log n$ e $\log n!$

Qual é a relação assintótica?

entre $n \log n$ e $\log n!$

- Claramente, $\log n! = O(n \log n)$, pois como:

$$\begin{array}{rcccccccc} n \log n & = & \log n & + & \log n & + & \cdots & + & \log n \\ \log n! & = & \log n & + & \log(n-1) & + & \cdots & + & \log 1 \end{array}$$

- Temos que para $c = 1$ e $n_0 = 4$:

$$\log n! \leq c \cdot n \log n, \; n \geq n_0$$

Qual é a relação assintótica?

entre $n \log n$ e $\log n!$

- Mas, $\log n! = \Omega(n \log n)$ também!

Mostrar que $\log n! \geq \frac{1}{2} \cdot n \log n, \; n \geq 4$