

Roteiro

Eficiência em
Máquinas de
Turing

Análise de
Algoritmos

Eficiência em
Algoritmos

1 Eficiência em Máquinas de Turing

Decidindo $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

2 Análise de Algoritmos

O novo Herói da disciplina

3 Eficiência em Algoritmos

Ordenação e *Bubble Sort*

Intuição sobre Notação Assintótica

Eficiência em Máquinas de Turing

Roteiro

Eficiência em Máquinas de Turing

Decidindo $\mathcal{L} =$
 $\{0^n 1^n \mid n \geq$
 $0\}$

Análise de Algoritmos

Eficiência em Algoritmos

- Dado uma linguagem. Ex.: $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- Considere uma MT M que decide \mathcal{L} .
- Quanto tempo M gasta para decidir \mathcal{L} ?

Eficiência em Máquinas de Turing

Roteiro

Eficiência em Máquinas de Turing

Decidindo $\mathcal{L} =$
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Análise de Algoritmos

Eficiência em Algoritmos

- Dado uma linguagem. Ex.: $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- Considere uma MT M que decide \mathcal{L} .
- Quanto tempo M gasta para decidir \mathcal{L} ?
- O que é **tempo**?

Eficiência em Máquinas de Turing

Roteiro

Eficiência em Máquinas de Turing

Decidindo $\mathcal{L} =$
 $\{0^n 1^n \mid n \geq$
 $0\}$

Análise de Algoritmos

Eficiência em Algoritmos

- Dado uma linguagem. Ex.: $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- Considere uma MT M que decide \mathcal{L} .
- Quanto tempo M gasta para decidir \mathcal{L} ?
- O que é **tempo**? é o número de operações que M realiza, ou seja, o tamanho da seqüência de configurações

Eficiência em Máquinas de Turing

Roteiro

Eficiência em Máquinas de Turing

Decidindo $\mathcal{L} =$
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Análise de Algoritmos

Eficiência em Algoritmos

- Dado uma linguagem. Ex.: $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- Considere uma MT M que decide \mathcal{L} .
- Quanto tempo M gasta para decidir \mathcal{L} ?
- O que é **tempo**? é o número de operações que M realiza, ou seja, o tamanho da seqüência de configurações
- Seqüência de configurações para **qual palavra**?
- claramente, o tamanho da seqüência vai depender do **tamanho da palavra**.

Eficiência em Máquinas de Turing

Roteiro

Eficiência em Máquinas de Turing

Decidindo $\mathcal{L} =$
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Análise de Algoritmos

Eficiência em Algoritmos

- Dado uma linguagem. Ex.: $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- Considere uma MT M que decide \mathcal{L} .
- Quanto tempo M gasta para decidir \mathcal{L} ?
- O que é **tempo**? é o número de operações que M realiza, ou seja, o tamanho da seqüência de configurações
- Seqüência de configurações para **qual palavra**?
- claramente, o tamanho da seqüência vai depender do **tamanho da palavra**.
- Mas, mesmo para **palavras do mesmo tamanho**, o tamanho da seqüência pode ser diferente!...

Eficiência em Máquinas de Turing

... por causa disso:

- Usamos o **pior caso** entre todas as palavras de tamanho n .

0000	6
0001	7
0010	7
0011	12
0100	4
0101	4
0110	4
0111	4
1000	4
1001	10
1010	14
1011	3
1100	3
1101	5
1110	8
1111	10

Roteiro

Eficiência em
Máquinas de
Turing

Decidindo $\mathcal{L} =$
 $\{0^n 1^n \mid n \geq$
 $0\}$

Análise de
Algoritmos

Eficiência em
Algoritmos

Eficiência em Máquinas de Turing

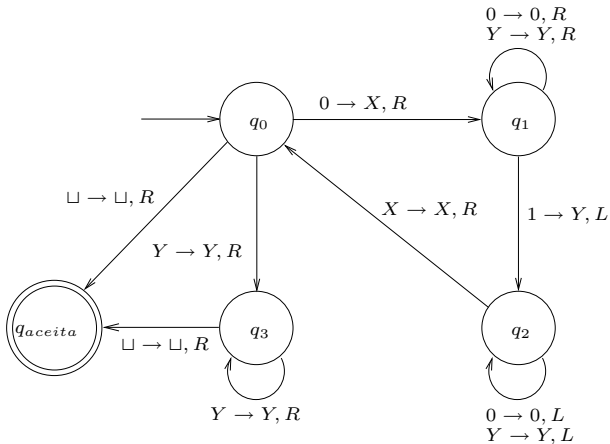
- Associamos à máquina M uma função, $f_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, onde: $f_M(n)$ é o tamanho da maior seqüência de configurações entre todas as palavras de tamanho n .

$$\begin{aligned}f_M(1) &= 2 \\f_M(2) &= 4 \\f_M(3) &= 11 \\f_M(4) &= 14 \\f_M(5) &= 16 \\f_M(6) &= 22 \\f_M(7) &= 29 \\f_M(8) &= 45 \\&\vdots \quad \quad \quad \vdots\end{aligned}$$

$f_M(n)$ é a função de custo de tempo de pior caso para M

Decidindo $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

A máquina M_1



A máquina M_1

Seq. de configurações de M_1 para 000111

$q_0000111 \Rightarrow Xq_100111 \Rightarrow X0q_10111 \Rightarrow X00q_1111 \Rightarrow X0q_20Y11 \Rightarrow Xq_200Y11 \Rightarrow$
 $q_2X00Y11$

$Xq_000Y11 \Rightarrow XXq_10Y11 \Rightarrow XX0q_1Y11 \Rightarrow XX0Yq_111 \Rightarrow XX0q_2YY1 \Rightarrow$
 $XXq_20YY1 \Rightarrow Xq_2X0YY1$

$XXq_00YY1 \Rightarrow XXXq_1YY1 \Rightarrow XXXYq_1Y1 \Rightarrow XXXYYq_11 \Rightarrow XXXYq_2YY \Rightarrow$
 $XXXq_2YYY \Rightarrow Xq_2XYYY$

$XXXq_0YYY \Rightarrow XXXYq_3YY \Rightarrow XXXYYq_3Y \Rightarrow XXXYYYq_3$

$XXXq_0YYY$

Roteiro

Eficiência em
Máquinas de
Turing

Decidindo $\mathcal{L} =$
 $\{0^n 1^n \mid n \geq$
 $0\}$

Análise de
Algoritmos

Eficiência em
Algoritmos

A máquina M_1

Seq. de configurações de M_1 para 000111

$[q_0 000111 \Rightarrow Xq_1 00111 \Rightarrow X0q_1 0111 \Rightarrow X00q_1 111 \Rightarrow X0q_2 0Y11 \Rightarrow Xq_2 00Y11 \Rightarrow q_2 X00Y11]$ $6 + 1$

$[Xq_0 00Y11 \Rightarrow XXq_1 0Y11 \Rightarrow XX0q_1 Y11 \Rightarrow XX0Yq_1 11 \Rightarrow XX0q_2 YY1 \Rightarrow XXq_2 0Y Y1 \Rightarrow Xq_2 X0Y Y1]$ $6 + 1$

$[XXq_0 0Y Y1 \Rightarrow XXXq_1 Y Y1 \Rightarrow XXXYq_1 Y1 \Rightarrow XXXY Yq_1 1 \Rightarrow XXXY q_2 Y Y \Rightarrow XXXq_2 Y Y Y \Rightarrow Xq_2 X Y Y Y]$ $6 + 1$

$[XXXq_0 Y Y Y \Rightarrow XXXY q_3 Y Y \Rightarrow XXXY Yq_3 Y \Rightarrow XXXY Y Yq_3]$ $1 + 6/2$

$[XXXq_0 Y Y Y]$ 1

Roteiro

Eficiência em
Máquinas de
Turing

Decidindo $\mathcal{L} =$
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Análise de
Algoritmos

Eficiência em
Algoritmos

A máquina M_1

Seq. de configurações de M_1 para 000111

$[q_0000111 \Rightarrow Xq_100111 \Rightarrow X0q_10111 \Rightarrow X00q_1111 \Rightarrow X0q_20Y11 \Rightarrow Xq_200Y11 \Rightarrow q_2X00Y11]$ $6 + 1$

$[Xq_000Y11 \Rightarrow XXq_10Y11 \Rightarrow XX0q_1Y11 \Rightarrow XX0Yq_111 \Rightarrow XX0q_2YY1 \Rightarrow XXq_20YY1 \Rightarrow Xq_2X0YY1]$ $6 + 1$

$[XXq_00YY1 \Rightarrow XXXq_1YY1 \Rightarrow XXXYq_1Y1 \Rightarrow XXXYYq_11 \Rightarrow XXXYq_2YY \Rightarrow XXXq_2YYY \Rightarrow Xq_2XYYY]$ $6 + 1$

$[XXXq_0YYY \Rightarrow XXXYq_3YY \Rightarrow XXXYYq_3Y \Rightarrow XXXYYYq_3]$ $1 + 6/2$

$[XXXq_0YYY]$ 1

Total: $\frac{6}{2}(1 + 6) + 1 + \frac{6}{2} + 1 = 26$

Roteiro

Eficiência em
Máquinas de
Turing

Decidindo $\mathcal{L} =$
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Análise de
Algoritmos

Eficiência em
Algoritmos

A máquina M_1

Seq. de configurações de M_1 para 000111

$[q_0000111 \Rightarrow Xq_100111 \Rightarrow X0q_10111 \Rightarrow X00q_1111 \Rightarrow X0q_20Y11 \Rightarrow Xq_200Y11 \Rightarrow q_2X00Y11]$ 6 + 1

$[Xq_000Y11 \Rightarrow XXq_10Y11 \Rightarrow XX0q_1Y11 \Rightarrow XX0Yq_111 \Rightarrow XX0q_2YY1 \Rightarrow XXq_20YY1 \Rightarrow Xq_2X0YY1]$ 6 + 1

$[XXq_00YY1 \Rightarrow XXXq_1YY1 \Rightarrow XXXYq_1Y1 \Rightarrow XXXYYq_11 \Rightarrow XXXYq_2YY \Rightarrow XXXq_2YYY \Rightarrow XXq_2XYYY]$ 6 + 1

$[XXXq_0YYY \Rightarrow XXXYq_3YY \Rightarrow XXXYYq_3Y \Rightarrow XXXYYYq_3]$ 1 + 6/2

$[XXXq_0YYY]$ 1

$$\text{Total: } \frac{6}{2}(1 + 6) + 1 + \frac{6}{2} + 1 = 26$$

Generalizando:

$$\frac{n}{2}(1 + n) + 1 + \frac{n}{2} + 1 = \frac{n^2}{2} + 2\frac{n}{2} + 2 \rightarrow f_{M_1}(n) = \frac{n^2}{2} + n + 2$$

Roteiro

Eficiência em
Máquinas de
Turing

Decidindo $\mathcal{L} =$
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Análise de
Algoritmos

Eficiência em
Algoritmos

A máquina M_1

Custo de pior caso

n	$f_{M_1}(n)$
2	6
4	14
8	42
16	146
32	546
64	2114
128	8322
256	33026
512	131586

Dá para ser mais eficiente?

Roteiro

Eficiência em
Máquinas de
Turing

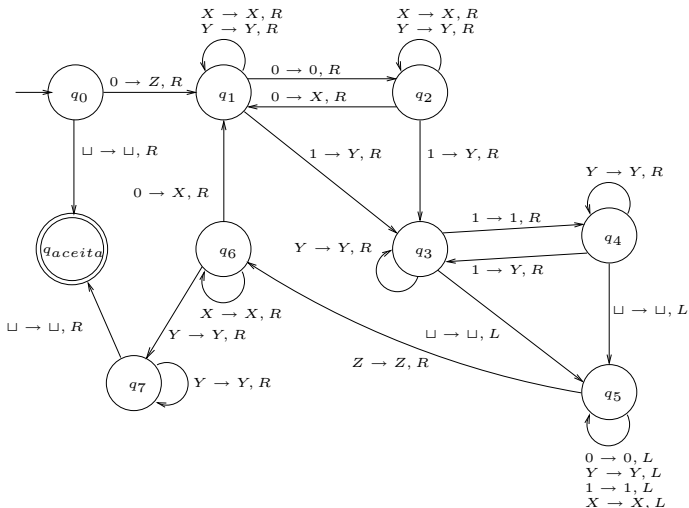
Decidindo $\mathcal{L} =$
 $\{0^n 1^n \mid n \geq$
 $0\}$

Análise de
Algoritmos

Eficiência em
Algoritmos

Decidindo $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

A máquina M_2



Roteiro

Eficiência em
Máquinas de
Turing

Decidindo $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Análise de
Algoritmos

Eficiência em
Algoritmos

A máquina M_2

Seq. de configurações de M_2 para 00001111

$q_0 00001111$

$Zq_1 0001111 \Rightarrow Z0q_2 001111 \Rightarrow Z0Xq_1 01111 \Rightarrow Z0X0Yq_2 1111 \Rightarrow Z0X0Yq_3 111 \Rightarrow$
 $Z0X0Y1q_4 11 \Rightarrow Z0X0Y1Yq_3 1 \Rightarrow Z0X0Y1Y1q_4$

$Z0X0Y1Yq_5 1 \Rightarrow Z0X0Y1q_5 Y1 \Rightarrow Z0X0Yq_5 1Y1 \Rightarrow Z0X0q_5 Y1Y1 \Rightarrow Z0Xq_5 0Y1Y1 \Rightarrow$
 $Z0q_5 X0Y1Y1 \Rightarrow Zq_5 0X0Y1Y1$

Roteiro

Eficiência em
Máquinas de
Turing

Decidindo $\mathcal{L} =$
 $\{0^n 1^n \mid n \geq$
 $0\}$

Análise de
Algoritmos

Eficiência em
Algoritmos

A máquina M_2

Seq. de configurações de M_2 para 00001111

$[q_0 00001111]$ 1 configuração inicial

$[Zq_1 0001111 \Rightarrow Z0q_2 001111 \Rightarrow Z0Xq_1 01111 \Rightarrow Z0X0Yq_2 1111 \Rightarrow Z0X0Yq_3 111 \Rightarrow Z0X0Y1q_4 11 \Rightarrow Z0X0Y1Yq_3 1 \Rightarrow Z0X0Y1Y1q_4]$ 8 percorre até o final da palavra

$[Z0X0Y1Yq_5 1 \Rightarrow Z0X0Y1q_5 Y1 \Rightarrow Z0X0Yq_5 1Y1 \Rightarrow Z0X0q_5 Y1Y1 \Rightarrow Z0Xq_5 0Y1Y1 \Rightarrow Z0q_5 X0Y1Y1 \Rightarrow Zq_5 0X0Y1Y1]$ 7 retorna à posição inicial

Roteiro

Eficiência em
Máquinas de
Turing

Decidindo $\mathcal{L} =$
 $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Análise de
Algoritmos

Eficiência em
Algoritmos

A máquina M_2

Seq. de configurações de M_2 para 00001111

$[q_0 00001111]$ 1 configuração inicial

$[Z_{q_1} 0001111 \Rightarrow Z_{q_2} 001111 \Rightarrow Z_{q_1} 01111 \Rightarrow Z_{q_2} 1111 \Rightarrow Z_{q_3} 111 \Rightarrow Z_{q_4} 11 \Rightarrow Z_{q_3} 1 \Rightarrow Z_{q_4}]$ 8 percorre até o final da palavra

$[Z_{q_5} 1 \Rightarrow Z_{q_5} 1 \Rightarrow Z_{q_5} 1 \Rightarrow Z_{q_5} 1 \Rightarrow Z_{q_5} 1 \Rightarrow Z_{q_5} 1 \Rightarrow Z_{q_5} 1 \Rightarrow Z_{q_5} 1]$ 7 retorna à posição inicial

Quantas vezes vai repetir esse procedimento?

A máquina M_2

Seq. de configurações de M_2 para 00001111

$[q_0 00001111]$ 1 configuração inicial

$[Z_{q_1} 0001111 \Rightarrow Z_{q_2} 001111 \Rightarrow Z_{q_1} 01111 \Rightarrow Z_{q_2} 01111 \Rightarrow Z_{q_3} 0111 \Rightarrow Z_{q_4} 011 \Rightarrow Z_{q_3} 01 \Rightarrow Z_{q_4} 01]$ 8 percorre até o final da palavra

$[Z_{q_5} 01 \Rightarrow Z_{q_5} 01 \Rightarrow Z_{q_5} 01 \Rightarrow Z_{q_5} 01 \Rightarrow Z_{q_5} 01 \Rightarrow Z_{q_5} 01 \Rightarrow Z_{q_5} 01]$ 7 retorna à posição inicial

Quantas vezes vai repetir esse procedimento?

Total: $\log_2(8) * (1 + 8 + 7) = 2 * 8 * \log_2(8) = 48$

A máquina M_2

Seq. de configurações de M_2 para 00001111

$[q_0 00001111]$ 1 configuração inicial

$[Z_{q_1} 0001111 \Rightarrow Z_{q_2} 001111 \Rightarrow Z_{q_1} 01111 \Rightarrow Z_{q_2} 01111 \Rightarrow Z_{q_3} 0111 \Rightarrow Z_{q_4} 011 \Rightarrow Z_{q_3} 01 \Rightarrow Z_{q_4} 01]$ 8 percorre até o final da palavra

$[Z_{q_5} 011 \Rightarrow Z_{q_5} 011Y_1 \Rightarrow Z_{q_5} 011Y_1 \Rightarrow Z_{q_5} 011Y_1 \Rightarrow Z_{q_5} 011Y_1 \Rightarrow Z_{q_5} 011Y_1 \Rightarrow Z_{q_5} 011Y_1]$ 7 retorna à posição inicial

Quantas vezes vai repetir esse procedimento?

Total: $\log_2(8) * (1 + 8 + 7) = 2 * 8 * \log_2(8) = 48$

Generalizando: $\log_2(n) * (1 + n + n - 1) \rightarrow f_{M_2}(n) = 2n \log_2 n$

Quem é mais eficiente?

Custo de pior caso

n	$f_{M_1}(n)$	$f_{M_2}(n)$
2	6	4
4	14	16
8	42	48
16	146	128
32	546	320
64	2114	768
128	8322	1792
256	33026	4096
512	131586	9216

No limite, quando $n \rightarrow \infty$, M_2 é mais eficiente!

Medida da eficiência com a qual um dado algoritmo resolve um dado problema

- Nossas **palavras-chave** nessa parte do curso:
 - Função de custo do algoritmo;
 - Notação Assintótica;
 - Cotas Superiores e Inferiores:
 - para funções de custo de algoritmos;
 - para problemas;
 - Algoritmos para Ordenação;
 - Redução entre problemas e Cotas.

Nosso novo Herói: Donald Knuth

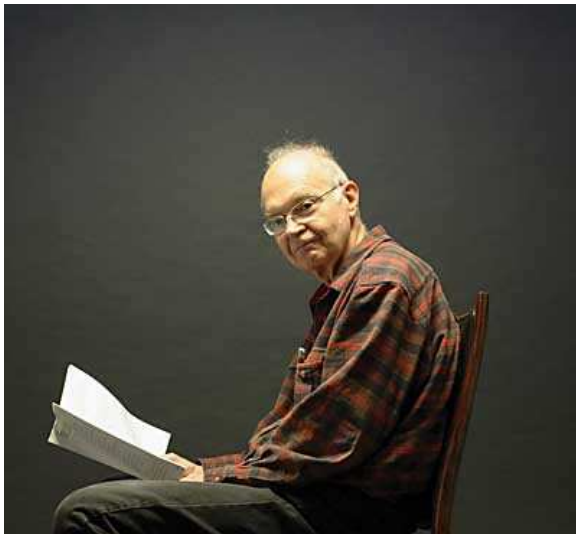
Roteiro

Eficiência em
Máquinas de
Turing

Análise de
Algoritmos

O novo Herói da
disciplina

Eficiência em
Algoritmos



Máquinas de Turing → Algoritmos

Roteiro

Eficiência em
Máquinas de
Turing

Análise de
Algoritmos

Eficiência em
Algoritmos

Ordenação e
Bubble Sort
Intuição sobre
Notação
Assintótica

Mas vimos que...

Formal	Intuitivo, conceitual
Linguagens	Problemas
Máquina de Turing	Algoritmo
Palavra	Entrada ou Instância

Roteiro

Eficiência em
Máquinas de
Turing

Análise de
Algoritmos

Eficiência em
Algoritmos

Ordenação e
Bubble Sort

Intuição sobre
Notação
Assintótica

```
int v[N];
...
bubbleSort( int *v ){
    int i, flag = 1;
    while( flag ){
        flag = 0;
        for( i = 0; i < N-1; i++ )
            if (v[i] > v[i+1]){
                swap( &v[i], &v[i+1] );
                flag = 1;
            }
    }
}
```

Quantas **comparações** serão feitas no pior caso?

Bubble Sort

Roteiro

Eficiência em
Máquinas de
Turing

Análise de
Algoritmos

Eficiência em
Algoritmos

Ordenação e
Bubble Sort

Intuição sobre
Notação
Assintótica

- No melhor caso, o vetor v já está ordenado e serão feitas $(n - 1)$ comparações;
- Se mais ou menos metade dos elementos estiverem ordenados: mais ou menos $\frac{n}{2}(n - 1)$ comparações;
- No pior caso, v está em ordem decrescente: $n(n - 1)$ comparações;

$$f_{bubbleSort}(n) = n^2 - n$$

Notação Assintótica

Agora vamos esquecer computação...

A **notação assintótica** dá informação sobre o crescimento assintótico de uma função

A **intuição** é:

função	\leq	\geq	$=$	$<$	$>$
$f_{M_1}(n) = \frac{n^2}{2} + n + 2$	$O(n^2)$	$\Omega(n)$	$\Theta(n^2)$	$o(n^3)$	$w(n)$
$f_{M_2}(n) = 2n \log_2 n$	$O(n^4)$	$\Omega(n)$	$\Theta(n \log n)$	$o(n^2)$	$w(n)$
$f_{bubbleSort}(n) = n^2 - n$	$O(f_{M_2}(n))$	$\Omega(\log n)$	$\Theta(f_{M_1}(n))$	$o(n^4)$	$w(n \log n)$