Autômatos e computabilidade

Máquinas de Turing

Pedro A D Rezende
UnB – IE – CIC

A & C: Máquinas de Turing

Definições: Máquina de Turing

Uma máquina de Turing (TM) é uma séptupla

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \square, \delta, F)$$

A & C: Máquinas de Turing

Definições: Máquina de Turing

Uma máquina de Turing (TM) é uma séptupla

$M = ($	Q ,	Σ ,	Γ ,	q_0 ,	$\square$,	δ ,	F $)$
	Estados	Alfabeto de i/o	Alfabeto de fita	Estado inicial	S. vazio da fita	Transições	Estados finais

satisfazendo:

- Q, Σ, Γ conjuntos *finitos*;

A & C: Máquinas de Turing

Definições: Máquina de Turing

Uma máquina de Turing (TM) é uma séptupla

$$M = (\underbrace{Q}_{\text{Estados}} , \underbrace{\Sigma}_{\text{Alfabeto de i/o}} , \underbrace{\Gamma}_{\text{Alfabeto de fita}} , \underbrace{q_0}_{\text{Estado inicial}} , \underbrace{\square}_{\text{S. vazio da fita}} , \underbrace{\delta}_{\text{Transições}} , \underbrace{F}_{\text{Estados finais}})$$

satisfazendo:

- Q, Σ, Γ conjuntos *finitos,* $\Sigma \subseteq \Gamma$;
- $q_0 \in Q$; $\square \in \Gamma - \Sigma$; $F \subseteq Q$;

A & C: Máquinas de Turing

Definições: Máquina de Turing

Uma máquina de Turing (TM) é uma séptupla

$$M = (Q , \Sigma , \Gamma , q_0 , \square , \delta , F)$$

Estados	Alfabeto de i/o	Alfabeto de fita	Estado inicial	S. vazio da fita	Transições	Estados finais

satisfazendo:

- Q, Σ, Γ conjuntos *finitos*, $\Sigma \subseteq \Gamma$;
- $q_0 \in Q$; $\square \in \Gamma - \Sigma$; $F \subseteq Q$;
- $\delta \subseteq (Q\times\Gamma)\times(Q\times\Gamma\times\{\leftarrow,\rightarrow\})$

A & C: Máquinas de Turing

Transições

Numa TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \square, \delta, F)$ dizemos que

$((q,X),(q',Y,\leftrightarrow)) \in \delta$ é uma *transição de q para q' com X na posição de leitura da fita sobrescrito por Y e esta movida para* $\leftrightarrow$ *(*$\leftarrow$*esq. ou dir.*$\rightarrow$*).*

A & C: Máquinas de Turing

Transições

Numa TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \square, \delta, F)$ dizemos que

$((q,X),(q',Y,\leftrightarrow)) \in \delta$ é uma *transição de q para q' com X na posição de leitura da fita sobrescrito por Y e esta movida para* $\leftrightarrow$ *(*$\leftarrow$*esq. ou dir.*$\rightarrow$*).*

Ao representar M por um digrafo, denotamos: Q como vértices, δ como arestas *rotuladas*,

$$q \xrightarrow{X;\, Y,\, \leftrightarrow} q'$$

Notação: $\leftrightarrow$ denota um elemento de $\{\leftarrow,\rightarrow\}$

A & C: Máquinas de Turing

Trasições (moves)

Dado uma TM $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \square, \delta, F)$ denotamos as *possíveis transições de (q,X):*

$$\delta(q,X) = \{ (r, Y) \in Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow\} \mid ((q,X),(r,Y,\leftrightarrow)) \in \delta \}$$

A & C: Máquinas de Turing

Descrição instantânea (DI)

Para descrever uma configuração de uma TM

$M=(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \square, \delta, F)$ em dado instante, usa-se

$$(\alpha \quad , \quad q \quad , \quad \beta)$$

Conteúdo da fita à esquerda da poisção de leitura	estado atual	Conteúdo da fita à esquerda da poisção de leitura

A & C: Máquinas de Turing

Descrição instantânea (DI)

Para descrever uma configuração de uma TM

$M=(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \square, \delta, F)$ em dado instante, usa-se

$$(\alpha,\ q,\ \beta)$$

conteúdo esquerdo	estado atual	conteúdo direito da fita

Para descrever a mudança de configuração causada por uma transição, usa-se a notação

$(\gamma\underline{X},\ q,\ Z\gamma') \mid\!-\!- (\gamma Y\underline{Z},\ q',\ \gamma')$ [se $\delta(q,X)$ contém $(q',Y,\rightarrow)$]

esq. antes	estado antes	dir. antes	esq. depois	estado depois	dir. depois

(_ denota posição de leitura)

A & C: Máquinas de Turing

Descrição instantânea (DI)

Para descrever uma configuração de uma TM

$M=(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \square, \delta, F)$ em dado instante, usa-se

$$(\alpha,\ q,\ \beta)$$

conteúdo esquerdo | estado atual | conteúdo direito da fita

Para descrever a mudança de configuração causada por uma transição, usa-se a notação

$(\gamma Z\underline{X},\ q,\ \gamma') \mid\!\!-\!- (\gamma\underline{Z},\ q',\ Y\gamma')$ [se $\delta(q,X)$ contém $(q',Y,\leftarrow)$]

esq. antes | estado antes | dir. antes | esq. depois | estado depois | dir. depois

Transição descreve relação entre DIs

(_ denota posição de leitura)

A & C: Máquinas de Turing

Computações (árvore de possíveis transições)

Para descrever as computações de uma TM

$M=(Q,\Sigma,\Gamma,q_0,\square,\delta,F)$ sob input u = aw, "calcula-se"

$$(\underline{a}, q_0, w) \vdash^*$$

fita à esq	estado inicial	fita à dir.	fecho transitivo das transições de M

A & C: Máquinas de Turing

Computações (árvore de possíveis transições)

Para descrever as computações de uma TM

$M=(Q,\Sigma,\Gamma,q_0,\square,\delta,F)$ sob input u = aw, "calcula-se"

$$(\underline{a}, q_0, w) \mid\!\!-\!\!-^*$$

fita à esq	estado inicial	fita à dir.	fecho transitivo das transições de M

--* descreve a árvore de possíveis transições a partir de uma DI inicial (raiz).

A & C: Máquinas de Turing

Computações (árvore de possíveis transições)

Para descrever as computações de uma TM

$M=(Q,\Sigma,\Gamma,q_0,\square,\delta,F)$ sob input u = aw, "calcula-se"

$(\underline{a}, q_0, w) \mid\!\!-\!\!-^*$

fita à esq	estado inicial	fita à dir.	fecho transitivo das transições de M

--* descreve a árvore de possíveis transições a partir de uma DI inicial (raiz). Nela um caminho descreve uma computação possível de M, denotada $(\alpha, q, \beta) \mid\!\!-\!\!-^* (\alpha', q', \beta')$

A & C: Máquinas de Turing

TM como reconhecedor de linguagem

Uma TM $M=(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Box, \delta, F)$ computa o reconhecimento da linguagem $L(M) \subseteq \Sigma^*$, dada por

$$aw \in L(M) \Leftrightarrow_{def} [\ (\underline{a}, q_0, w) \mid\!\!-\!\!-^* (\alpha, q, \beta) \mid q \in F\ ]$$

Fita à esq. | estado inicial | fita à dir. | ID em estado final e sem transições possíveis

A & C: Máquinas de Turing

TM como reconhecedor de linguagem

Uma TM $M=(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \square, \delta, F)$ computa o reconhecimento da linguagem $L(M) \subseteq \Sigma^*$, dada por

$$aw \in L(M) \Leftrightarrow_{def} [\, (\underline{a}, q_0, w) \mid\!\!-\!\!-^* (\alpha, q, \beta) \mid q \in F \,]$$

Fita à esq. — estado inicial — fita à dir. — ID em estado final e sem transições possíveis

Sem perda de generalidade (sobre o modelo computacional) consideramos que :

$$q \in F \Rightarrow \delta(q.\Gamma) = \varnothing$$

(Estados finais são sempre estados de parada)