Autômatos e computabilidade

Propriedades de Linguagens CFL

Pedro A D Rezende
UnB – IE – CIC

A & C: Propiedades de CFLs

Lema do bombeamento para CFLs (HU L6.1)

$L \in \mathcal{L}_{CFL} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid \forall z \in L \; [\; |z| \geq n \Rightarrow \exists\, u, v, w, x, y \in \Sigma^* \mid$

$1 \leq |vx| \wedge |vwx| \leq n \wedge z = uvwxy \wedge \forall k \in \mathbb{N} \; [uv^k w x^k y \in L \;] \;]$

Demonstração (ilustrada):

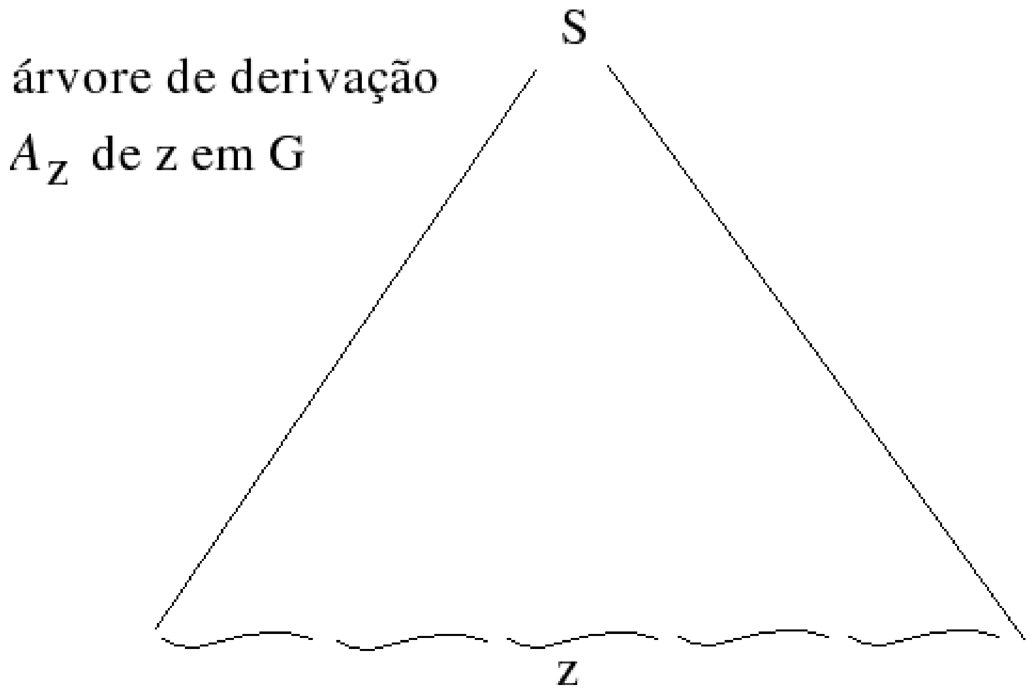
A & C: Propiedades de CFLs

Lema do bombeamento para CFLs (HU L6.1)

$L \in \mathcal{L}_{CFL} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid \forall z \in L\ [\ |z| \geq n \Rightarrow \exists\ u, v, w, x, y \in \Sigma^* \mid$

$1 \leq |vx| \wedge |vwx| \leq n \wedge z = uvwxy \wedge \forall k \in \mathbb{N}\ [uv^k wx^k y \in L\ ]\ ]$

1:



Seja G CFG na forma de Chomski | L(G) = L. Seja $z \in L$, $|z| \geq n$

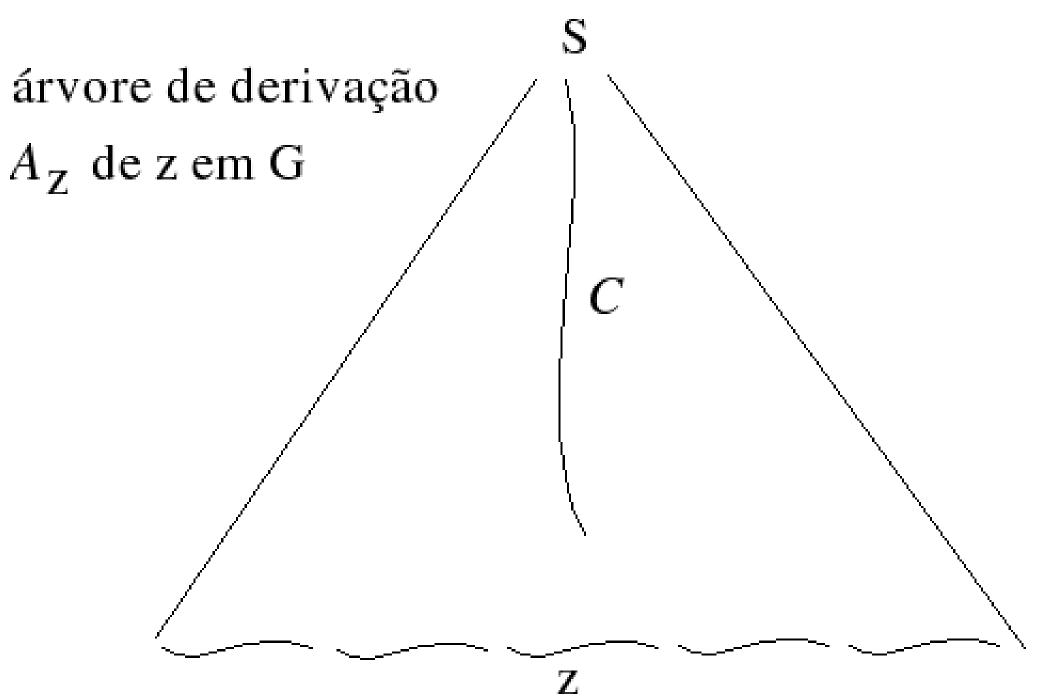
A & C: Propiedades de CFLs

Lema do bombeamento para CFLs (HU L6.1)

$L \in \mathcal{L}_{CFL} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid \forall z \in L \; [\; |z| \geq n \Rightarrow \exists\; u, v, w, x, y \in \Sigma^* \mid$

$1 \leq |vx| \wedge |vwx| \leq n \wedge z = uvwxy \wedge \forall k \in \mathbb{N} \; [uv^k wx^k y \in L \;] \;]$

2:



Se $n > 2^i$, onde $i = |V_G|$, então $\exists$ caminho C em $A_z \mid \; |C| > i$

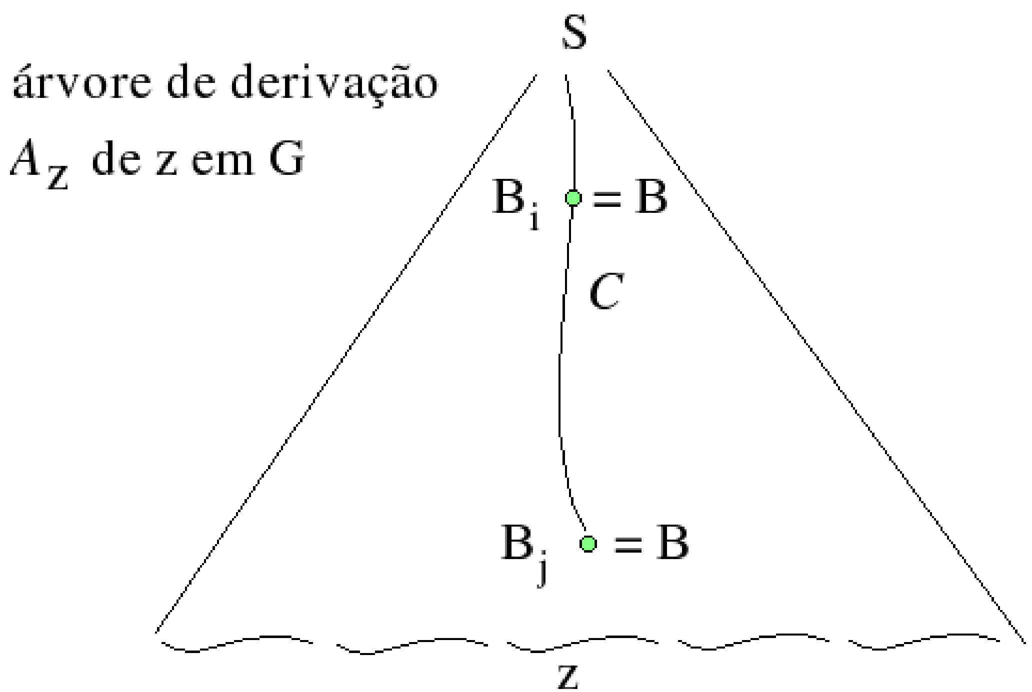
A & C: Propiedades de CFLs

Lema do bombeamento para CFLs (HU L6.1)

$L \in \mathcal{L}_{CFL} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid \forall z \in L \; [\; |z| \geq n \Rightarrow \exists \; u, v, w, x, y \in \Sigma^* \mid$

$1 \leq |vx| \wedge |vwx| \leq n \wedge z = uvwxy \wedge \forall k \in \mathbb{N} \; [uv^k wx^k y \in L \;] \;]$

3:



Se $C = B_1 \ldots B_s$ onde $B_i \in V_G$, $|C| > |V_G| \Rightarrow \exists \; i < j \mid B_i = B_j$

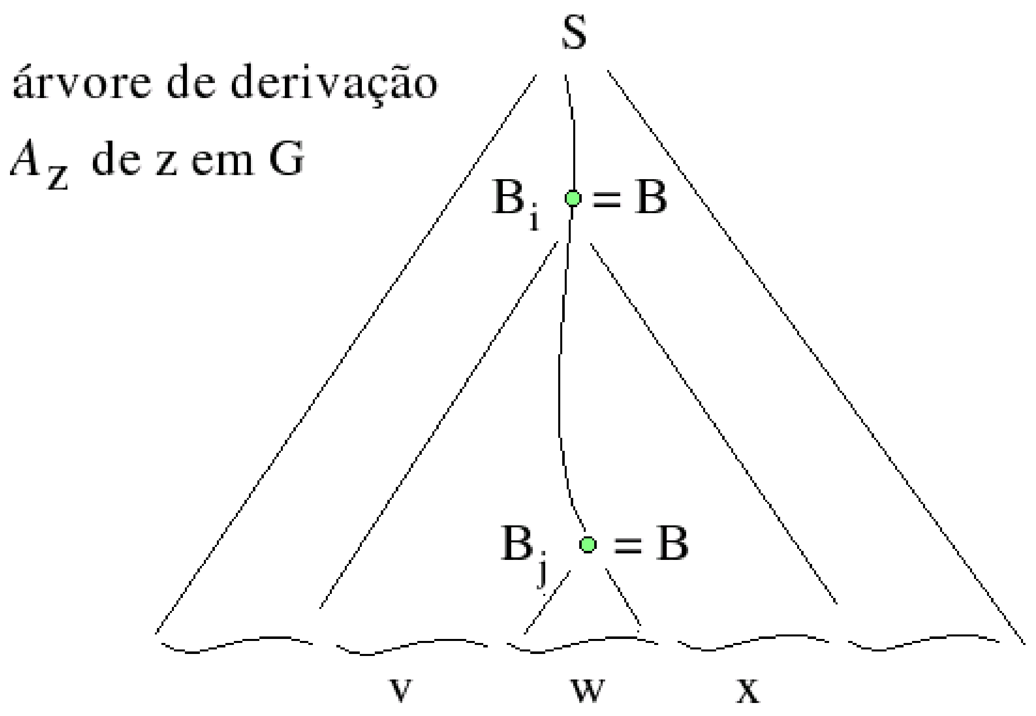
A & C: Propiedades de CFLs

Lema do bombeamento para CFLs (HU L6.1)

$L \in \mathcal{L}_{CFL} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid \forall z \in L\ [\ |z| \geq n \Rightarrow \exists\ u, v, w, x, y \in \Sigma^* \mid$

$1 \leq |vx| \wedge |vwx| \leq n \wedge z = uvwxy \wedge \forall k \in \mathbb{N}\ [uv^k wx^k y \in L\ ]\ ]$

4:



Em A_z, sejam v, w, x tais que $B_i \Rightarrow^* vwx$, $B_j \Rightarrow^* w$

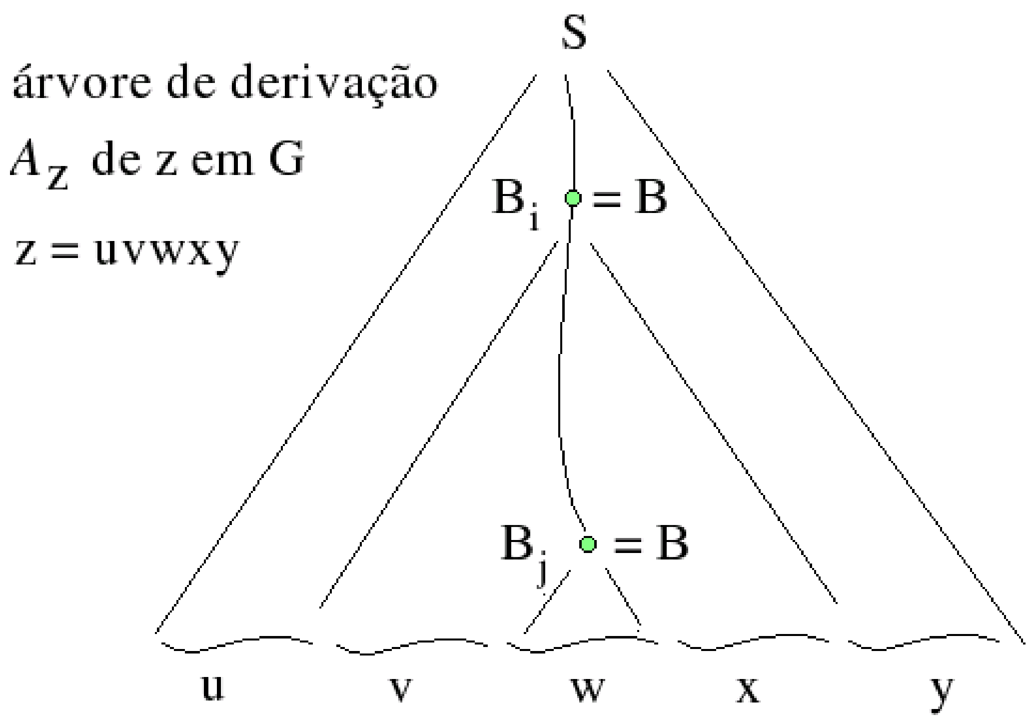
A & C: Propiedades de CFLs

Lema do bombeamento para CFLs (HU L6.1)

$L \in \mathcal{L}_{CFL} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid \forall z \in L\ [\ |z| \geq n \Rightarrow \exists\ u, v, w, x, y \in \Sigma^* \mid$

$1 \leq |vx| \wedge |vwx| \leq n \wedge z = uvwxy \wedge \forall k \in \mathbb{N}\ [uv^k wx^k y \in L\ ]\ ]$

5:



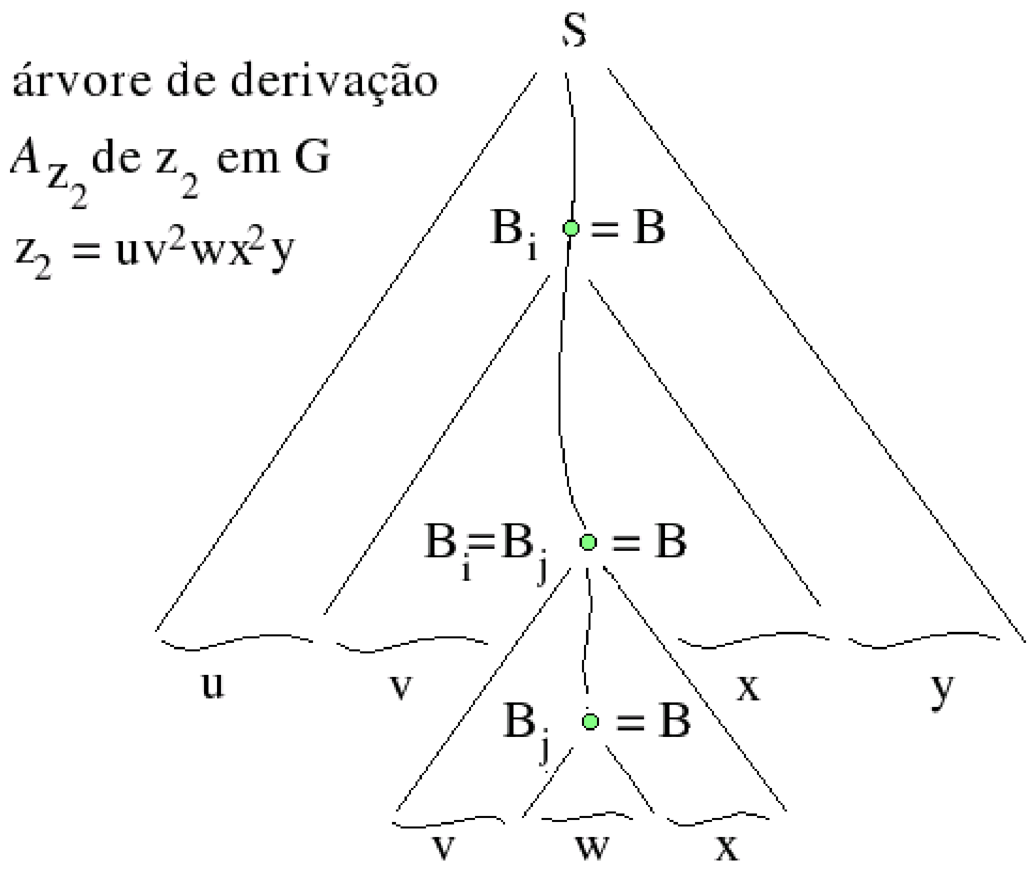
Em A_z, $B_i \Rightarrow^* vwx$ e $B_j \Rightarrow^* w$ particionam z em uvwxy

A & C: Propiedades de CFLs

Lema do bombeamento para CFLs (HU L6.1)

$L \in \mathcal{L}_{CFL} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid \forall z \in L \; [\; |z| \geq n \Rightarrow \exists\; u, v, w, x, y \in \Sigma^* \mid \ldots]$

6:



Substituindo $B_j \Rightarrow^* w$ por $B_i \Rightarrow^* vwx$ em A_z temos $S \Rightarrow^* uv^2wx^2y$

A & C: Propiedades de CFLs

Lema do bombeamento para CFLs (HU L6.1)

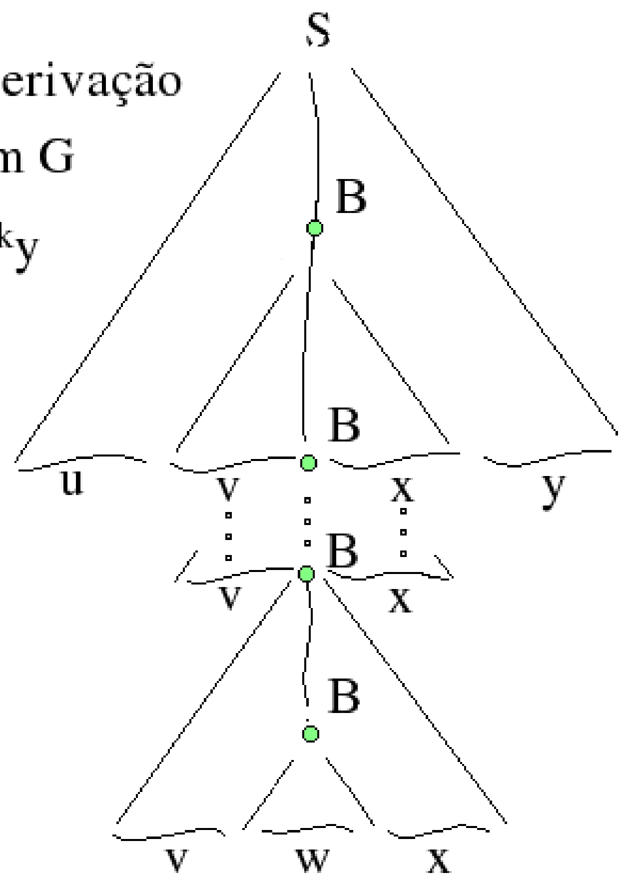
$L \in \mathcal{L}_{CFL} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid \forall z \in L \; [\; |z| \geq n \Rightarrow \exists\; u, v, w, x, y \in \Sigma^* \mid \ldots]$

7:

árvore de derivação

A_{z_k} de z_k em G

$z_k = uv^k wx^k y$



Por indução, $B \Rightarrow^* vwx$ no lugar de $B \Rightarrow^* w$ implica $S \Rightarrow^* uv^k wx^k y$

A & C: Propiedades de CFLs

Propriedades de fechamento de $\mathcal{L}_{\text{CFG}}$ (HU T6.1-5)

1. $\mathcal{L}_{\text{CFG}}$ é fechada em relação a $\cup$, $\circ$, *

A & C: Propiedades de CFLs

Propriedades de fechamento de $\mathcal{L}_{CFG}$ (HU T6.1-5)

1. $\mathcal{L}_{CFG}$ é fechada em relação a $\cup$, $\circ$, *
2. $\mathcal{L}_{CFG}$ não é fechada sob $\cap$: $\exists$ L, L' $\in \mathcal{L}_{CFG}$ |

   $L \cap L' \notin \mathcal{L}_{CFG}$ ex: $\{a^j b^k c^k \ j,k \in \mathbb{N}\} \cap \{a^j b^j c^k \ j,k \in \mathbb{N}\}$

A & C: Propiedades de CFLs

Propriedades de fechamento de $\mathcal{L}_{CFG}$ (HU T6.1-5)

1. $\mathcal{L}_{CFG}$ é fechada em relação a $\cup$, $\circ$, *
2. $\mathcal{L}_{CFG}$ não é fechada sob $\cap$: $\exists$ L, L' $\in \mathcal{L}_{CFG}$ |

   $L \cap L' \notin \mathcal{L}_{CFG}$ ex: $\{a^j b^k c^k \; j,k \in \mathbb{N}\} \cap \{a^j b^j c^k \; j,k \in \mathbb{N}\}$
3. $\mathcal{L}_{CFG}$ não é fechada sob complemento:

   $L \cap L' = {}^c({}^cL \cup {}^cL')$

A & C: Propiedades de CFLs

Propriedades de fechamento de $\mathcal{L}_{CFG}$ (HU T6.1-5)

1. $\mathcal{L}_{CFG}$ é fechada em relação a $\cup$, $\circ$, *
2. $\mathcal{L}_{CFG}$ não é fechada sob $\cap$: $\exists$ L, L' $\in \mathcal{L}_{CFG}$ |

   $L \cap L' \notin \mathcal{L}_{CFG}$ ex: $\{a^j b^k c^k \; j,k \in \mathbb{N}\} \cap \{a^j b^j c^k \; j,k \in \mathbb{N}\}$
3. $\mathcal{L}_{CFG}$ não é fechada sob complemento:

   $L \cap L' = {}^c({}^cL \cup {}^cL')$
4. Substituição:

   $a \rightarrow L_a$ em cadeias de L, $a \in T$, $L \subseteq T^*$, $L_a \in \mathcal{L}_{CFG}$

A & C: Propiedades de CFLs

Propriedades de fechamento de $\mathcal{L}_{CFG}$ (HU T6.5)

5. $\mathcal{L}_{CFG}$ é fechada sob $\cap$ com $\mathcal{L}_{reg}$:

   $L \in \mathcal{L}_{CFG}$, $R \in \mathcal{L}_{Reg} \Rightarrow L \cap R \in \mathcal{L}_{CFG}$

   $L \cap R = L(M')$ onde Q', δ', e F' em M' são, respectivamente, produto direto de Q, δ e F dos respectivos autômatos de L e R.

A & C: Propiedades de CFLs

Algoritmos para CFLs (HU T6.6)

Existe algoritmo para determinar se $L \in \mathcal{L}_{CFG}$ é vazia, finita ou infinita:

1: Dado G | L = L(G), obtenha G' na forma de Chomski sem símbolos inúteis e sem produção fazia (que gera L – $\{\lambda\}$);

A & C: Propiedades de CFLs

Algoritmos para CFLs (HU T6.6)

Existe algoritmo para determinar se $L \in \mathcal{L}_{CFG}$ é vazia, finita ou infinita:

1: Dado G | L = L(G), obtenha G' na forma de Chomski sem símbolos inúteis e sem produção fazia (que gera $L - \{\lambda\}$);

2: Crie um grafo dirigido para representar derivabilidade em G': $A \rightarrow BC \in P_{G'}$ é representada pelas arestas $A \rightarrow B$ e $A \rightarrow C$;

A & C: Propiedades de CFLs

Algoritmos para CFLs (HU T6.6)

Existe algoritmo para determinar se $L \in \mathcal{L}_{CFG}$ é vazia, finita ou infinita:

1: Dado G | L = L(G), obtenha G' na forma de Chomski sem símbolos inúteis e sem produção fazia (que gera $L - \{\lambda\}$);

2: Crie um grafo dirigido para representar derivabilidade em G': $A \rightarrow BC \in P_{G'}$ é representada pelas arestas $A \rightarrow B$ e $A \rightarrow C$;

3: L(G') e L(G) são finitas se esse grafo não contém ciclos: Se existe um ciclo, digamos, $A_0, A_1, ..., A_s$, então G' deriva

$$A_0 \Rightarrow \alpha_1 A_1 \beta_1 \ ... \Rightarrow \alpha_s A_s \beta_s \Rightarrow \alpha_{s+1} A_0 \beta_{s+1}$$

A & C: Propiedades de CFLs

Algoritmos para CFLs (HU T6.6)

Existem algoritmos para determinar se w $\in$ L.

OBS1: Os resultados até aqui fornecem um algoritmo geral: converte-se G à forma normal de Greibach e busca-se uma derivação de w entre as possíveis derivações (tempo exponencial em |w|), ou PDA (espaço expondencial em |w|);

A & C: Propiedades de CFLs

Algoritmos para CFLs (HU T6.6)

Existem algoritmos para determinar se $w \in L$.

OBS1: Os resultados até aqui fornecem um algoritmo geral: converte-se G à forma normal de Greibach e busca-se uma derivação de w entre as possíveis derivações (tempo exponencial em $|w|$), ou PDA (espaço expondencial em $|w|$);
OBS2: Existem algoritmos gerais (para qualquer CFL) de complexidade temporal cúbica ($\sim |w|^3$) Ex: CYK (HU F6.8);

A & C: Propiedades de CFLs

Algoritmos para CFLs (HU T6.6)

Existem algoritmos para determinar se w $\in$ L.

OBS1: Os resultados até aqui fornecem um algoritmo geral: converte-se G à forma normal de Greibach e busca-se uma derivação de w entre as possíveis derivações (tempo exponencial em |w|), ou PDA (espaço expondencial em |w|);
OBS2: Existem algoritmos gerais (para qualquer CFL) de complexidade temporal cúbica (~ $|w|^3$) Ex: CYK (HU F6.8);
OBS3: Existem algoritmos restritos (p.ex., para gramáticas LALR(1)) com complexidade linear (~|w|) com aplicações em compiladores e interpretadores. (HU cap.10)