Autômatos e computabilidade

Autômatos a pilha 1

Pedro A D Rezende
UnB – IE – CIC

A & C: Autômatos a pilha 1

Definições: Automaton a pilha (PushDown)

Um automaton a pilha (PDA) é uma séptupla

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$$

A & C: Autômatos a pilha 1

Definições: Automaton a pilha

Um automaton a pilha (PDA) é uma séptupla

$$M = (\; Q \; , \; \Sigma \; , \; \Gamma \; , \; q_0 \; , \; Z_0 \; , \; \delta \; , \; F \;)$$

Estados	Alfabeto de input	Alfabeto de pilha	Estado inicial	S. Inicial de pilha	Transições	Estados finais

A & C: Autômatos a pilha 1

Definições: Automaton a pilha

Um automaton a pilha (PDA) é uma séptupla

$M = ($	Q	,	Σ	,	Γ	,	q_0	,	Z_0	,	δ	,	F	$)$
	Estados		Alfabeto de input		Alfabeto de pilha		Estado inicial		S. Inicial de pilha		Transições		Estados finais	

satisfazendo:

- Q, Σ, Γ conjuntos *finitos*;

A & C: Autômatos a pilha 1

Definições: Automaton a pilha

Um automaton a pilha (PDA) é uma séptupla

$M = ($	Q ,	Σ ,	Γ ,	q_0 ,	Z_0 ,	δ ,	F $)$
	Estados	Alfabeto de input	Alfabeto de pilha	Estado inicial	S. Inicial de pilha	Transições	Estados finais

satisfazendo:

- Q, Σ, Γ conjuntos *finitos*;
- $q_0 \in Q$; $Z_0 \in \Gamma$; $F \subseteq Q$;

A & C: Autômatos a pilha 1

Definições: Automaton a pilha

Um automaton a pilha (PDA) é uma séptupla

$$M = (Q \; , \; \Sigma \; , \; \Gamma \; , \; q_0 \; , \; Z_0 \; , \; \delta \; , \; F \;)$$

Q	Σ	Γ	q_0	Z_0	δ	F
Estados	Alfabeto de input	Alfabeto de pilha	Estado inicial	S. Inicial de pilha	Transições	Estados finais

satisfazendo:

- Q, Σ, Γ conjuntos *finitos*;
- $q_0 \in Q$; $Z_0 \in \Gamma$; $F \subseteq Q$;
- $\delta \subseteq (Q\times(\Sigma\cup\{\lambda\})\times\Gamma) \times (Q\times\Gamma^*)$ relação finita

A & C: Autômatos a pilha 1

Transições

Num PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ dizemos que

$((q,a,Z),(q',\gamma)) \in \delta$ é uma *transição de q por a para q' com Z no topo da pilha substituído por* γ.

A & C: Autômatos a pilha 1

Transições

Num PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ dizemos que

$((q,a,Z),(q',\gamma)) \in \delta$ é uma *transição de q por a para q' com Z no topo da pilha substituído por* γ.

Ao representar δ por uma tabela, temos:

$Q \times \Gamma \setminus \Sigma$	... a ...
(q_0,Z_0)	
(q,Z)	$\{(q',\gamma)\ldots\}$

A & C: Autômatos a pilha 1

Trasições (moves)

Num PDA M = $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ dizemos que

$((q,a,Z),(q',\gamma)) \in \delta$ é uma *transição de q por a para q' com Z no topo da pilha substituído por* γ*.*

Ao representar δ por um digrafo, temos:

Q como vértices, δ como arestas *rotuladas*

A & C: Autômatos a pilha 1

Trasições (moves)

Num PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ dizemos que

$((q,a,Z),(q',\gamma)) \in \delta$ é uma *transição de q por a para q' com Z no topo da pilha substituído por* γ.

Ao representar δ por um digrafo, temos:

Q como vértices, δ como arestas *rotuladas*

$$q \xrightarrow{a,\, Z;\, \gamma} q'$$

transição de (q,Z) por a para (q',γ)

A & C: Autômatos a pilha 1

Trasições (moves)

Dado um PDA $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ denotamos as *possíveis transições de (q,Z) pelo input a:*

$$\delta(q,a,Z) = \{ (r,\gamma) \in Q \times \Gamma^* \mid ((q,a,Z),(r,\gamma)) \in \delta \}$$

A & C: Autômatos a pilha 1

Trasições (moves)

Dado um PDA $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ denotamos as *possíveis transições de (q,Z) pelo input a:*

$$\delta(q,a,Z) = \{ (r,\gamma) \in Q \times \Gamma^* \mid ((q,a,Z),(r,\gamma)) \in \delta \}$$

e as *possíveis transições expontâneas de (q,Z):*

$$\delta(q,\lambda,Z) = \{ (r,\gamma) \in Q \times \Gamma^* \mid ((q,\lambda,Z),(r,\gamma)) \in \delta \}$$

A & C: Autômatos a pilha 1

Trasições (moves)

Dado um PDA $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ denotamos as *possíveis transições de (q,Z) pelo input a:*

$$\delta(q,a,Z) = \{ (r,\gamma) \in Q \times \Gamma^* \mid ((q,a,Z),(r,\gamma)) \in \delta \}$$

e as *possíveis transições expontâneas de (q,Z):*

$$\delta(q,\lambda,Z) = \{ (r,\gamma) \in Q \times \Gamma^* \mid ((q,\lambda,Z),(r,\gamma)) \in \delta \}$$

Convenção: γ será 'empilhada' da direita para a esquerda: o símbolo mais à esquerda de γ ficará no topo da pilha.

A & C: Autômatos a pilha 1

Descrição instantânea (DI)

Para descrever uma configuração de um PDA

$M=(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ em dado instante, usa-se

$$(q, \; w, \; \alpha)$$

estado atual | input | pilha atual

A & C: Autômatos a pilha 1

Descrição instantânea (DI)

Para descrever uma configuração de um PDA

M=(Q, Σ, Γ, q_0, Z_0, δ, F) em dado instante, usa-se

$$(q, \quad w, \quad \alpha)$$

estado atual	input	pilha atual

Para descrever a mudança de configuração causada por uma transição, usa-se a notação

$(q, \; au, \; Z\beta) \;|\!\!-\!- \; (q', \; u, \; \gamma\beta)$ [se δ(q,a,Z) contém (q',γ)]

estado antes	input antes	pilha antes	estado depois	input depois	pilha depois

A & C: Autômatos a pilha 1

Descrição instantânea (DI)

Para descrever uma configuração de um PDA

$M=(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ em dado instante, usa-se

$$(q, \ w, \ \alpha)$$

estado atual | input | pilha atual

Para descrever a mudança de configuração causada por uma transição, usa-se a notação

$(q, \ au, \ Z\beta) \mid\!\!-\!- (q', \ u, \ \gamma\beta)$ [se $\delta(q,a,Z)$ contém (q',γ)]

estado antes | input antes | pilha antes | estado depois | input depois | pilha depois

Transição descreve uma Relação entre DIs

A & C: Autômatos a pilha 1

Computações (árvore de possíveis transições)

Para descrever as computações de um PDA

$M=(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ sob input w, calcula-se

$(q_0, w, Z_0) \vdash^*$

estado inicial	input	pilha inicial	fecho transitivo das transições de M

A & C: Autômatos a pilha 1

Computações (árvore de possíveis transições)

Para descrever as computações de um PDA

M=(Q, Σ, Γ, q_0, Z_0, δ, F) sob input w, calcula-se

$$(q_0, w, Z_0) \mid\!\text{--}^*$$

estado inicial	input	pilha inicial	fecho transitivo das transições de M

|--* descreve a árvore de possíveis transições a partir de uma DI inicial (raiz).

A & C: Autômatos a pilha 1

Computações (árvore de possíveis transições)

Para descrever as computações de um PDA

M=(Q, Σ, Γ, q_0, Z_0, δ, F) sob input w, calcula-se

$$(q_0, w, Z_0) \mid\!-\!-^*$$

estado inicial | input | pilha inicial | fecho transitivo das transições de M

|--* descreve a árvore de possíveis transições a partir de uma DI inicial (raiz). Nela um caminho descreve uma computação possível de M

A & C: Autômatos a pilha 1

Computações (árvore de possíveis transições)

Para descrever as computações de um PDA

M=(Q, Σ, Γ, q_0, Z_0, δ, F) sob input w, calcula-se

$$(q_0, w, Z_0) \mid\!\!-\!\!-^*$$

estado inicial	input	pilha inicial	fecho transitivo das transições de M

|--* descreve a árvore de possíveis transições a partir de uma DI inicial (raiz). Nela um caminho descreve uma computação possível de M, denotada $(q, w, \alpha) \mid\!\!-\!\!-^* (q',w',\alpha')$

A & C: Autômatos a pilha 1

PDA como reconhecedor de linguagem

Um PDA $M=(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ computa o reconhecimento da linguagem $L(M) \subseteq \Sigma^*$, dada por

$$w \in L(M) \Leftrightarrow_{def} [\ (q_0, w, Z_0) \mid\!\text{--}^* (q, \lambda, \gamma) \mid q \in F\ ]$$

estado inicial — input — pilha inicial — ID final em estado final e com imput vazio

A & C: Autômatos a pilha 1

PDA como reconhecedor de linguagem

Um PDA $M=(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ computa o reconhecimento da linguagem $L(M) \subseteq \Sigma^*$, dada por

$$w \in L(M) \Leftrightarrow_{def} [\, (q_0, w, Z_0) \mid\!\text{--}^* (q, \lambda, \gamma) \mid q \in F \,]$$

estado inicial — input — pilha inicial — ID final em estado final e com imput vazio

Exemplos de linguagens reconhecíveis por PDAs:

- Palíndromes marcadas: $\{\, wcw^R \mid w \in \{0,1\}^*, w^R = \text{reversa de } w \,\}$

A & C: Autômatos a pilha 1

PDA como reconhecedor de linguagem

Um PDA $M=(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ computa o

reconhecimento da linguagem $L(M) \subseteq \Sigma^*$, dada por

$$w \in L(M) \Leftrightarrow_{def} [\ (q_0, w, Z_0) \mid\!\!-\!\!-^* (q, \lambda, \gamma) \mid q \in F\ ]$$

estado inicial | input | pilha inicial | ID final em estado final e com imput vazio

Exemplos de linguagens reconhecíveis por PDAs:

- Palíndromes marcadas: $\{ wcw^R \mid w \in \{0,1\}^*, w^R$=reversa de w $\}$
- Palíndromes: $\{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^*, w^R$ = reversa de w $\}$

A & C: Autômatos a pilha 1

PDA como reconhecedor de linguagem

Um PDA $M=(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ computa o reconhecimento da linguagem $L(M) \subseteq \Sigma^*$, dada por

$$w \in L(M) \Leftrightarrow_{def} [\, (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \lambda, \gamma) \mid q \in F \,]$$

estado inicial — input — pilha inicial — ID final em estado final e com imput vazio

Exemplos de linguagens reconhecíveis por PDAs:

- Palíndromes marcadas: $\{ wcw^R \mid w \in \{0,1\}^*, w^R = \text{reversa de } w \}$
- Palíndromes: $\{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^*, w^R = \text{reversa de } w \}$
- Parêntesis balanceados: gerada por $P = \{ S \to SS \mid (S) \mid \lambda \}$

A & C: Autômatos a pilha 1

Determinismo

Um PDA que permite no máximo uma transição a partir de cada DI é dito determinístico (dPDA)

A & C: Autômatos a pilha 1

Determinismo

Um PDA que permite no máximo uma transição a partir de cada DI é dito determinístico (dPDA)

Formalmente, $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ é dPDA se:

- $\forall q \in Q, Z \in \Gamma \; [\, \delta(q,\lambda,Z) \neq \varnothing \Rightarrow \forall a \in \Sigma \; [\delta(q,a,Z) = \varnothing \,] \,]$
- $\forall q \in Q, Z \in \Gamma, a \in \Sigma \cup \{\lambda\} \;\; [\, |\delta(q,a,Z)\,| \leq 1 \,]$

A & C: Autômatos a pilha 1

Determinismo

Um PDA que permite no máximo uma transição a partir de cada DI é dito determinístico (dPDA)

Formalmente, $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ é dPDA se:

- $\forall q \in Q, Z \in \Gamma$ [$\delta(q,\lambda,Z) \neq \emptyset \Rightarrow \forall a \in \Sigma$ [$\delta(q,a,Z) = \emptyset$]]
- $\forall q \in Q, Z \in \Gamma, a \in \Sigma \cup \{\lambda\}$ [$|\delta(q,a,Z)| \leq 1$]

Uma das linguagens citadas na lâmina anterior como reconhecíveis por PDAs é reconhecível por dPDA, outra não.

A & C: Autômatos a pilha 1

Determinismo

Um PDA que permite no máximo uma transição a partir de cada DI é dito determinístico (dPDA)

Formalmente, $(Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ é dPDA se:

- $\forall q \in Q, Z \in \Gamma\ [\ \delta(q,\lambda,Z) \neq \emptyset \Rightarrow \forall a \in \Sigma\ [\delta(q,a,Z) = \emptyset\ ]\ ]$
- $\forall q \in Q, Z \in \Gamma, a \in \Sigma \cup \{\lambda\}\ \ [\ |\delta(q,a,Z)| \leq 1\ ]$

Uma das linguagens citadas na lâmina anterior como reconhecíveis por PDAs é reconhecível por dPDA, outra não. Verifique quais.

A & C: Autômatos a pilha 1

Linguagens reconhecíveis por PDAs

Dado $\mathcal{M}_{\text{PDA}} = \{ \text{M} \mid \text{M é PDA} \}$

define-se a classe das Linguagens Reconhecíveis por PDAs

$\mathcal{L}_{\text{PDA}} = \{ \text{L} \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{M} \in \mathcal{M}_{\text{PDA}} [\text{L} = \text{L(M)}] \}$

Equivalência de classes: $\mathcal{L}_{\text{PDA}} = \mathcal{L}_{\text{CFG}}$