Autômatos e computabilidade

Autômatos finitos 2

Pedro A D Rezende
UnB – IE – CIC

A & C: Autômatos finitos 2

Trasições “espontâneas”

Um λFA é um FA com transições por λ, isto é,

M = (Q, $\sum$, q_0, δ, F) onde $\delta \subseteq (Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\})) \times Q$.

A & C: Autômatos finitos 2

Trasições “espontâneas”

Um λFA é um FA com transições por λ, isto é,

$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ onde $\delta \subseteq (Q\times(\Sigma\cup\{\lambda\}))\times Q$.

$((q,\lambda),q') \in \delta$ seria transição de q *por* λ para q'.

$Q \setminus \Sigma\cup\{\lambda\}$	... a ... | λ
q_0	
q	$\{q'...\}$

A & C: Autômatos finitos 2

Comportamento de λFAs

O comportamento de um λFA perante cadeias de Σ inclui transições espontâneas (por λ).

A & C: Autômatos finitos 2

Comportamento de λFAs

O comportamento de um λFA perante cadeias de Σ inclui transições espontâneas (por λ).

$\delta^* \subseteq (Q\times\Sigma^*)\times Q$ é definida indutivamente por:

$$\delta^*(q,\lambda) = \{q\}^\lambda ;$$

$$\delta^*(q,a) = \delta(q,a)^\lambda ;$$

$$\delta^*(q,\alpha a) = \delta(\delta^*(q,\alpha),a)^\lambda .$$

A & C: Autômatos finitos 2

Comportamento de λFAs

O comportamento de um λFA perante cadeias de Σ inclui transições espontâneas (por λ).

$\delta^* \subseteq (Q\times\Sigma^*)\times Q$ é definida indutivamente por:

$$\delta^*(q,\lambda) = \{q\}^\lambda ;$$

$$\delta^*(q,a) = \delta(q,a)^\lambda ;$$

$$\delta^*(q,\alpha a) = \delta(\delta^*(q,\alpha),a)^\lambda$$

onde, dado $V\subseteq Q$, V^λ é o fecho λ de V:

$$V^\lambda = \{q\in Q \mid \exists \text{ caminho de } v\in V \text{ a } q \text{ rotulado por } \lambda\}$$

A & C: Autômatos finitos 2

Modelos computacionais para LFs

FA é um modelo para reconhecedores de linguagens regulares

A & C: Autômatos finitos 2

Modelos computacionais para LFs

FA é um modelo para reconhecedores de linguagens regulares

$\alpha \in \Sigma^*$ (string) $\rangle$ $|\delta^*(q_0,\alpha) \cap F|$ (booleano de $\alpha \in L(M)$?)

Input M output

A & C: Autômatos finitos 2

Modelos computacionais para LFs

FA é um modelo para reconhecedores de linguagens regulares

$\underset{\text{Input}}{\alpha \in \Sigma^*}$ (string) $\underset{\text{M}}{\rangle}$ $\underset{\text{output}}{|\delta^*(q_0,\alpha) \cap F|}$ (booleano de $\alpha \in L(M)$?)

Como encontrar modelo computacional inverso, i.e., para *geradores* de linguagens regulares?

A & C: Autômatos finitos 2

Modelos computacionais para LFs

FA é um modelo para reconhecedores de linguagens regulares

$\underset{\text{Input}}{\alpha \in \Sigma^*}$ (string) $\underset{M}{\rangle}$ $\underset{\text{output}}{|\delta^*(q_0, \alpha) \cap F|}$ (booleano de $\alpha \in L(M)$?)

Como encontrar modelo computacional inverso, i.e., para *geradores* de linguagens regulares?

$\underset{\text{Input}}{\ldots\ldots}$ (booleanos) $\underset{M}{\rangle}$ $\underset{\text{output}}{\alpha \in L}$ (string de $L \in \mathcal{L}_{Reg}$)

A & C: Autômatos finitos 2

Modelos computacionais para LFs

FA é um modelo para reconhecedores de linguagens regulares

$\alpha \in \Sigma^*$ (string) $\rangle_M$ $|\delta^*(q_0,\alpha) \cap F|$ (booleano de $\alpha \in L(M)$?)

Input M output

Como encontrar modelo computacional inverso, i.e., para *geradores* de linguagens regulares?

...... (booleanos) $\rangle_M$ $\alpha \in L$ (string de $L \in \mathcal{L}_{Reg}$)

Input M output

λFA revela modelo equivalente para geradores

A & C: Autômatos finitos 2

Equivalência funcional entre λFAs e NFAs

Dado qualquer λFA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, existe NFA M' que reconhece a mesma linguagem:

A & C: Autômatos finitos 2

Equivalência funcional entre λFAs e NFAs

Dado qualquer λFA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, existe DFA M' que reconhece a mesma linguagem:

$$M' = (2^Q, \Sigma, q'_0, \delta', F')$$

δ' é dada por transições de M com input e pelo fecho reflexivo-transitivo de transições por λ

$$\delta'(V,a) = \delta(V,a)^\lambda$$

A & C: Autômatos finitos 2

Equivalência funcional entre λFAs e DFAs

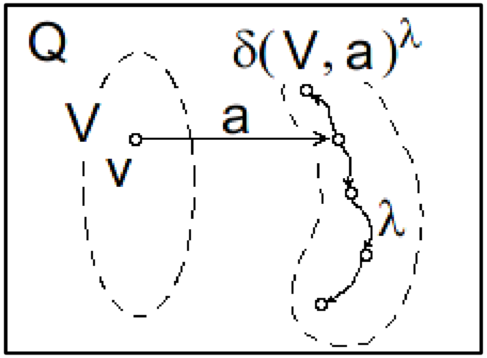
Dado qualquer λFA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, existe DFA M' que reconhece a mesma linguagem:

$$M' = (2^Q, \Sigma, q'_0, \delta', F')$$

δ' é dada por transições de M com input e pelo fecho reflexivo-transitivo de transições por λ

$$\delta'(V,a) = \delta(V,a)^\lambda$$

(estados alcançáveis a partir de V via transição por a + caminho rotulado por λ)



A & C: Autômatos finitos 2

Demonstração de $L(\mathcal{M}_{\lambda FA}) = L(\mathcal{M}_{DFA})$

Defina $q'_0 = \{q_0\}^\lambda$ e os estados finais de M' por

$F' = \{V \subseteq Q \mid V \cap F \neq \emptyset\}$ (V contém algum estado final de M)

A & C: Autômatos finitos 2

Demonstração de L($\mathcal{M}_{\lambda FA}$) = L($\mathcal{M}_{DFA}$)

Defina $q'_0 = \{q_0\}^\lambda$ e os estados finais de M' por

$F' = \{V \subseteq Q \mid V \cap F \neq \varnothing\}$ (V contém algum estado final de M)

Provaremos, por indução sobre $|\alpha|$:

$$\delta'^*(q'_0, \alpha) \in F' \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha) \cap F \neq \varnothing$$

A & C: Autômatos finitos 2

Demonstração de $L(\mathcal{M}_{\lambda FA}) = L(\mathcal{M}_{DFA})$

Defina $q'_0=\{q_0\}^\lambda$ e os estados finais de M' por

$F' = \{V \subseteq Q \mid V \cap F \neq \emptyset\}$ (V contém algum estado final de M)

Provaremos, por indução sobre $|\alpha|$:

$$\delta'^*(q'_0,\alpha) \in F' \Leftrightarrow \delta^*(q_0,\alpha) \cap F \neq \emptyset$$

P(0): $\delta'^*(q'_0,\lambda) \underset{\uparrow}{=} \{q'_0\}$

def. comportamento DFA

A & C: Autômatos finitos 2

Demonstração de $L(\mathcal{M}_{\lambda FA}) = L(\mathcal{M}_{DFA})$

Defina $q'_0 = \{q_0\}^{\lambda}$ e os estados finais de M' por

$F' = \{V \subseteq Q \mid V \cap F \neq \emptyset\}$ (V contém algum estado final de M)

Provaremos, por indução sobre $|\alpha|$:

$$\delta'^*(q'_0, \alpha) \in F' \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha) \cap F \neq \emptyset$$

P(0): $\delta'^*(q'_0, \lambda) = \{q'_0\} = \{\{q_0\}^{\lambda}\}$

def. comportamento DFA def. q inicial M'

A & C: Autômatos finitos 2

Demonstração de $L(\mathcal{M}_{\lambda FA}) = L(\mathcal{M}_{DFA})$

Defina $q'_0 = \{q_0\}^\lambda$ e os estados finais de M' por

$F' = \{V \subseteq Q \mid V \cap F \neq \emptyset\}$ (V contém algum estado final de M)

Provaremos, por indução sobre $|\alpha|$:

$$\delta'^*(q'_0, \alpha) \in F' \Leftrightarrow \delta^*(q_0, \alpha) \cap F \neq \emptyset$$

P(0): $\underbrace{\delta'^*(q'_0, \lambda) = \{q'_0\}}_{\text{def. comportamento DFA}} = \underbrace{\{\{q_0\}^\lambda\}}_{\text{def. q inicial M'}}$, e portanto

$\{q_0\}^\lambda \cap F \neq \emptyset$

M' reconhece λ (aplicando definição de F')

A & C: Autômatos finitos 2

Demonstração de $L(\mathcal{M}_{\lambda FA}) = L(\mathcal{M}_{DFA})$

Defina $q'_0 = \{q_0\}^\lambda$ e os estados finais de M' por

$F' = \{V \subseteq Q \mid V \cap F \neq \emptyset\}$ (V contém algum estado final de M)

Provaremos, por indução sobre $|\alpha|$:

$$\delta'^*(q'_0, \alpha) \in F' \iff \delta^*(q_0, \alpha) \cap F \neq \emptyset$$

P(0): $\underbrace{\delta'^*(q'_0, \lambda) = \{q'_0\}}_{\text{def. comportamento DFA}} \underbrace{= \{\{q_0\}^\lambda\}}_{\text{def. q inicial M'}}$, e portanto

$\underbrace{\{q_0\}^\lambda \cap F \neq \emptyset}_{\text{M' reconhece } \lambda}$ $\iff$ $\underbrace{\{q_0\}^\lambda \cap F \neq \emptyset}_{\text{M reconhece } \lambda}$

(aplicando definição de fecho)

A & C: Autômatos finitos 2

Demonstração de $L(\mathcal{M}_{\lambda FA}) = L(\mathcal{M}_{DFA})$

Defina $q'_0 = \{q_0\}^\lambda$ e os estados finais de M' por

$F' = \{V \subseteq Q \mid V \cap F \neq \emptyset\}$ (V contém algum estado final de M)

Provaremos, por indução sobre $|\alpha|$:

$$\delta'^*(q'_0, \alpha) \in F' \iff \delta^*(q_0, \alpha) \cap F \neq \emptyset$$

P(0): $\underbrace{\delta'^*(q'_0, \lambda) = \{q'_0\}}_{\text{def. comportamento DFA}} \underbrace{= \{\{q_0\}^\lambda\}}_{\text{def. q inicial M'}}$, e portanto

$\underbrace{\{q_0\}^\lambda \cap F \neq \emptyset}_{\text{M' reconhece } \lambda}$ $\qquad$ $\delta^*(q_0, \lambda) \cap F \neq \emptyset \iff \underbrace{\{q_0\}^\lambda \cap F \neq \emptyset}_{\text{M reconhece } \lambda}$

def. comportamento λFA

A & C: Autômatos finitos 2

Demonstração de $L(\mathcal{M}_{\lambda FA}) = L(\mathcal{M}_{DFA})$

Defina $q'_0=\{q_0\}^\lambda$ e os estados finais de M' por

$F' = \{V \subseteq Q \mid V \cap F \neq \emptyset\}$ (V contém algum estado final de M)

Provaremos, por indução sobre $|\alpha|$:

$$\delta'^*(q'_0,\alpha) \in F' \Leftrightarrow \delta^*(q_0,\alpha) \cap F \neq \emptyset$$

P(0): $\underbrace{\delta'^*(q'_0,\lambda) = \{q'_0\}}_{\text{def. comportamento DFA}} = \underbrace{\{\{q_0\}^\lambda\}}_{\text{def. q inicial M'}}$, e portanto

$$\underbrace{\{q_0\}^\lambda \cap F \neq \emptyset}_{\text{M' reconhece } \lambda} \underset{\text{Hipótese P(0).}}{\Leftrightarrow} \delta^*(q_0,\lambda) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \underbrace{\{q_0\}^\lambda \cap F \neq \emptyset}_{\text{M reconhece } \lambda}$$

A & C: Autômatos finitos 2

Demonstração de $L(\mathcal{M}_{\lambda FA}) = L(\mathcal{M}_{DFA})$ (continuação)

$\forall n \in \mathbb{N}$ [$P(n) \Rightarrow P(n+1)$]: supondo $\alpha \in L(M') \Leftrightarrow \alpha \in L(M)$,

$|\alpha| = n$

A & C: Autômatos finitos 2

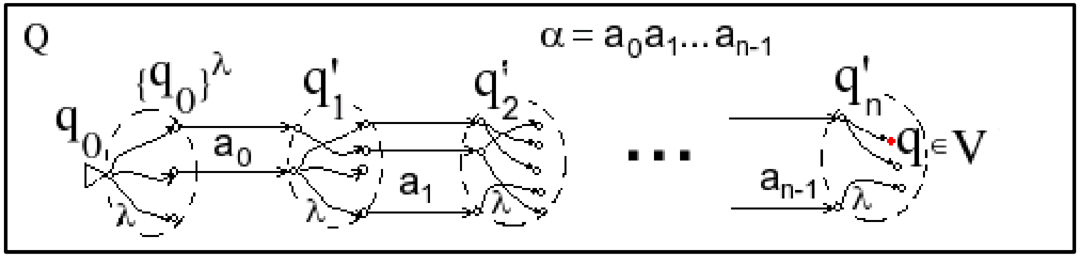
Demonstração de $L(\mathcal{M}_{\lambda FA}) = L(\mathcal{M}_{DFA})$ (continuação)

$\forall n \in \mathbb{N}$ [$P(n) \Rightarrow P(n+1)$]: (supondo $\alpha \in L(M') \Leftrightarrow \alpha \in L(M)$)

Dado $V = \delta'^{*}(q'_0, \alpha)$, temos: $\forall \alpha \in \Sigma^{*}$ [$q \in V \Leftrightarrow$

$\exists$ caminho de q_0 a q em M cuja concatenação

de rótulos produz α].



A & C: Autômatos finitos 2

Demonstração de $L(\mathcal{M}_{\lambda FA}) = L(\mathcal{M}_{DFA})$ (continuação)

$\forall n \in \mathbb{N}$ [$P(n) \Rightarrow P(n+1)$]: (supondo $\alpha \in L(M') \Leftrightarrow \alpha \in L(M)$)

Dado $V = \delta'^{*}(q'_0,\alpha)$, temos: $\forall \alpha \in \Sigma^{*}$ [$q \in V \Leftrightarrow$

$\exists$ caminho de q_0 a q em M cuja concatenação

de rótulos produz α]. Prova por indução, dado que:

$$\delta'^{*}(q'_0,\alpha a) = \delta'(\delta'^{*}(q'_0,\alpha),a) = \delta(V,a)^{\lambda}$$

A & C: Autômatos finitos 2

Demonstração de $L(\mathcal{M}_{\lambda FA}) = L(\mathcal{M}_{DFA})$ (continuação)

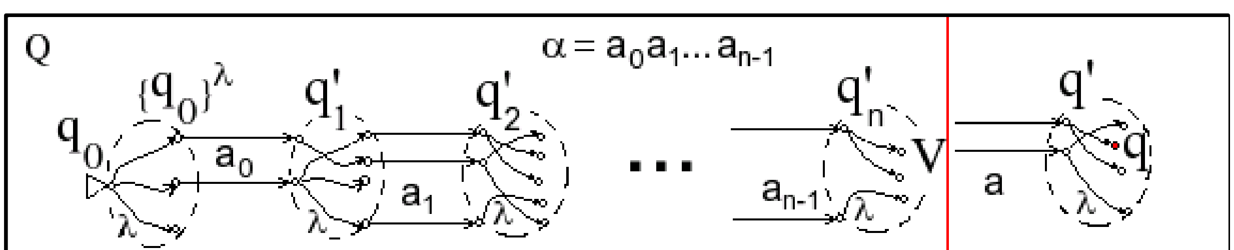
$\forall n \in \mathbb{N}$ [$P(n) \Rightarrow P(n+1)$]: (supondo $\alpha \in L(M') \Leftrightarrow \alpha \in L(M)$)

Dado $V = \delta'^*(q'_0, \alpha)$, temos: $\forall \alpha \in \Sigma^*$ [$q \in V \Leftrightarrow$

$\exists$ caminho de q_0 a q em M cuja concatenação

de rótulos produz α]. Prova por indução, dado que:

$$\delta'^*(q'_0, \alpha a) = \delta'(\delta'^*(q'_0, \alpha), a) = \delta(V, a)^\lambda$$



A & C: Autômatos finitos 2

Demonstração de $L(\mathcal{M}_{\lambda FA}) = L(\mathcal{M}_{DFA})$ (continuação)

$\forall n \in \mathbb{N}$ [$P(n) \Rightarrow P(n+1)$]: (supondo $\alpha \in L(M') \Leftrightarrow \alpha \in L(M)$)

Dado $V = \delta'^{*}(q'_0,\alpha)$, temos: $\forall \alpha \in \Sigma^{*}$ [$q \in V \Leftrightarrow$

$\exists$ caminho de q_0 a q em M cuja concatenação

de rótulos produz α]. Prova por indução, dado que:

$$\delta'^{*}(q'_0,\alpha a) = \delta'(\delta'^{*}(q'_0,\alpha),a) = \delta(V,a)^{\lambda}$$

em particular, $\alpha a \in L(M') \Leftrightarrow \exists$ caminho em M de

q_0 a $q \in F$ que se concatena em αa

A & C: Autômatos finitos 2

Demonstração de $L(\mathcal{M}_{\lambda FA}) = L(\mathcal{M}_{DFA})$ (continuação)

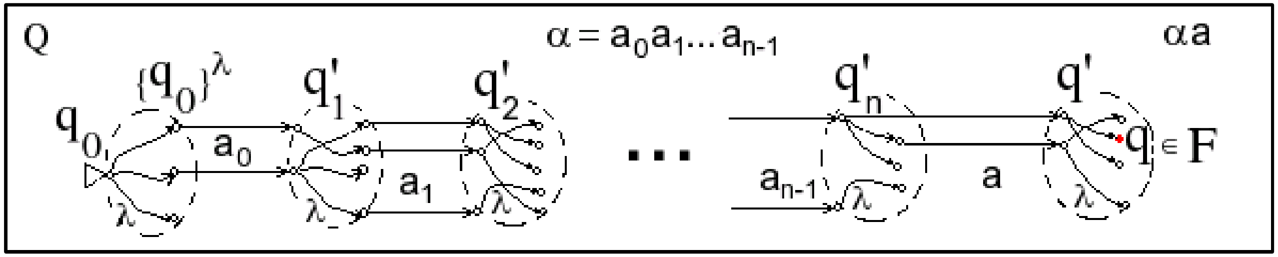
$\forall n \in \mathbb{N}$ [$P(n) \Rightarrow P(n+1)$]: (supondo $\alpha \in L(M') \Leftrightarrow \alpha \in L(M)$)

Dado $V = \delta'^{*}(q'_0,\alpha)$, temos: $\forall \alpha \in \Sigma^{*}$ [$q \in V \Leftrightarrow$

$\exists$ caminho de q_0 a q em M cuja concatenação

de rótulos produz α]. Prova por indução, dado que:

$$\delta'^{*}(q'_0,\alpha a) = \delta'(\delta'^{*}(q'_0,\alpha),a) = \delta(V,a)^{\lambda}$$



A & C: Autômatos finitos 2

Demonstração de $L(\mathcal{M}_{\lambda FA}) = L(\mathcal{M}_{DFA})$ (continuação)

$\forall n \in \mathbb{N}$ [$P(n) \Rightarrow P(n+1)$]: (supondo $\alpha \in L(M') \Leftrightarrow \alpha \in L(M)$)

Dado $V = \delta'^{*}(q'_0, \alpha)$, temos: $\forall \alpha \in \Sigma^{*}$ [$q \in V \Leftrightarrow$

$\exists$ caminho de q_0 a q em M cuja concatenação

de rótulos produz α]. Prova por indução, dado que:

$$\delta'^{*}(q'_0, \alpha a) = \delta'(\delta'^{*}(q'_0, \alpha), a) = \delta(V, a)^{\lambda}$$

em particular, $\alpha a \in L(M') \Leftrightarrow \exists$ caminho em M de

q_0 a $q \in F$ que se concatena em $\alpha a \Leftrightarrow \alpha a \in L(M)$