Autômatos e computabilidade

Autômatos finitos 1

Pedro A D Rezende
UnB – IE – CIC

A & C: Autômatos finitos 1

Definições formais: Automaton

Um automaton (FA) é uma quíntupla

$$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$$

A & C: Autômatos finitos 1

Definições formais: Automaton

Um automaton (FA) é uma quíntupla

$$M = (\underbrace{Q}_{\text{Estados}}, \underbrace{\Sigma}_{\text{Alfabeto}}, \underbrace{q_0}_{\text{Estado inicial}}, \underbrace{\delta}_{\text{Transições}}, \underbrace{F}_{\text{Estados finais}})$$

A & C: Autômatos finitos 1

Definições formais: Automaton

Um automaton (FA) é uma quíntupla

$$M = (\underbrace{Q}_{\text{Estados}} , \underbrace{\Sigma}_{\text{Alfabeto}} , \underbrace{q_0}_{\text{Estado inicial}} , \underbrace{\delta}_{\text{Transições}} , \underbrace{F}_{\text{Estados finais}})$$

satisfazendo:

- Q, Σ são conjuntos *finitos*;

A & C: Autômatos finitos 1

Definições formais: Automaton

Um automaton (FA) é uma quíntupla

$$M = (\underbrace{Q}_{\text{Estados}}, \underbrace{\Sigma}_{\text{Alfabeto}}, \underbrace{q_0}_{\text{Estado inicial}}, \underbrace{\delta}_{\text{Transições}}, \underbrace{F}_{\text{Estados finais}})$$

satisfazendo:

- Q, Σ são conjuntos *finitos*;
- $q_0 \in Q$; $F \subseteq Q$;

A & C: Autômatos finitos 1

Definições formais: Automaton

Um automaton (FA) é uma quíntupla

$$M = (\underset{\text{Estados}}{Q} , \underset{\text{Alfabeto}}{\Sigma} , \underset{\text{Estado inicial}}{q_0} , \underset{\text{Transições}}{\delta} , \underset{\text{Estados finais}}{F})$$

satisfazendo:

- Q, Σ são conjuntos *finitos*;
- $q_0 \in Q$; $F \subseteq Q$;
- $\delta \subseteq (Q \times \Sigma) \times Q$

A & C: Autômatos finitos 1

Trasições

Num FA $M = (Q, \sum, q_0, \delta, F)$ dizemos que

$((q,a),q') \in \delta$ é uma transição *de q por a para q'.*

A & C: Autômatos finitos 1

Trasições

Num FA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ dizemos que

$((q,a),q') \in \delta$ é uma transição de q por a para q'.

Ao representar δ por uma tabela, temos:

$Q \setminus \Sigma$	... a ...
q_0	
q	$\{q'...\}$

A & C: Autômatos finitos 1

Trasições

Num FA $M = (Q, \sum, q_0, \delta, F)$ dizemos que

$((q,a),q') \in \delta$ é uma transição de q por a para q'.

Ao representar M por um digrafo, temos:

Q como vértices, δ como arestas *rotuladas*

A & C: Autômatos finitos 1

Trasições

Num FA $M = (Q, \sum, q_0, \delta, F)$ dizemos que

$((q,a),q') \in \delta$ é uma transição de q por a para q'.

Ao representar M por um digrafo, temos:

Q como vértices, δ como arestas *rotuladas*

$$q \xrightarrow{a} q'$$

transição de q por a para q'

A & C: Autômatos finitos 1

Determinismo

Se um FA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ satisfaz:

$\delta \subseteq (Q\times\Sigma)\times Q$ é (também) *função* $\delta: Q\times\Sigma\rightarrow Q$,

dizemos que M é um DFA (FA determinístico).

A & C: Autômatos finitos 1

Determinismo

Se um FA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ satisfaz:

$\delta \subseteq (Q\times\Sigma)\times Q$ é (também) *função* $\delta: Q\times\Sigma\to Q$,

dizemos que M é um DFA (FA determinístico).

$Q \setminus \Sigma$	...	a	...
q_0			
q		q'	

A & C: Autômatos finitos 1

Determinismo

Se um FA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ satisfaz:

$\delta \subseteq (Q\times\Sigma)\times Q$ é (também) *função* $\delta: Q\times\Sigma\rightarrow Q$,

dizemos que M é um DFA (FA determinístico).

Formalmente:

Um DFA é um FA que satisfaz

$\forall q\in Q\ \forall a\in\Sigma\ \exists! q'\in Q\ [((q,a),q') \in \delta]$

A & C: Autômatos finitos 1

Determinismo

Se um FA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ satisfaz

$\delta \subseteq (Q\times\Sigma)\times Q$ é (também) *função* δ: $Q\times\Sigma\rightarrow Q$,

dizemos que M é um DFA (FA determinístico).

Caso contrário, M é um NFA (não-determinístico).

A & C: Autômatos finitos 1

Determinismo

Se um FA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ satisfaz:

$\delta \subseteq (Q\times\Sigma)\times Q$ é (também) *função* $\delta: Q\times\Sigma\rightarrow Q$,

dizemos que M é um DFA (FA determinístico).

Caso contrário, M é um NFA (não-determinístico).

Notação: em FAs, transição *de q por a* denota

$$\delta(q,a) = \{ r\in Q \mid ((q,a),r) \in \delta \}$$

A & C: Autômatos finitos 1

Comportamento

$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ induz o *comportamento*

$\delta^* \subseteq (Q \times \Sigma^*) \times Q$

A & C: Autômatos finitos 1

Comportamento

$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ induz o *comportamento*

$\delta^* \subseteq (Q \times \Sigma^*) \times Q$ (ou $\delta^*: Q \times \Sigma^* \to Q$ se M é DFA)

A & C: Autômatos finitos 1

Comportamento

$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ induz o *comportamento*

$\delta^* \subseteq (Q\times\Sigma^*)\times Q$ (ou $\delta^*: Q\times\Sigma^* \to Q$ se M é DFA)

definido indutivamente por:

$\delta^*(q,\lambda) = \{q\}$; $\delta^*(q,a) = \delta(q,a)$

$\delta^*(q,\alpha a) = \delta(\delta^*(q,\alpha),a)$ para $a\in\Sigma$, $\alpha\in\Sigma^*$

A & C: Autômatos finitos 1

Comportamento

$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ induz o *comportamento*

$\delta^* \subseteq (Q \times \Sigma^*) \times Q$ (ou $\delta^*: Q \times \Sigma^* \to Q$ se M é DFA)

definido indutivamente por:

$$\delta^*(q,\lambda) = \{q\} \; ; \quad \delta^*(q,a) = \delta(q,a)$$

$$\delta^*(q,\alpha a) = \delta(\delta^*(q,\alpha),a)$$

OBS1: Num grafo de DFA, $\delta^*(q,\alpha)$ descreve um caminho com raiz em q e *arcos rotulados por* α

A & C: Autômatos finitos 1

Comportamento

$M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ induz o *comportamento*

$\delta^* \subseteq (Q \times \Sigma^*) \times Q$ (ou $\delta^*: Q \times \Sigma^* \to Q$ se M é DFA)

definido indutivamente por:

$$\delta^*(q,\lambda) = \{q\} \; ; \quad \delta^*(q,a) = \delta(q,a)$$

$$\delta^*(q,\alpha a) = \delta(\delta^*(q,\alpha),a)$$

OBS2: Num grafo de NFA, $\delta^*(q,\alpha)$ descreve uma árvore com raiz em q e *níveis rotulados por* α

A & C: Autômatos finitos 1

Modelo computacional para reconhecer LFs

Dado um FA M, dizemos que M *reconhece* a linguagem formal L(M)

A & C: Autômatos finitos 1

Modelo computacional para reconhecer LFs

Dado um FA M, dizemos que M *reconhece* a linguagem formal L(M) definida por

$$L(M) = \{ \alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0,\alpha) \cap F \neq \emptyset \}$$

A & C: Autômatos finitos 1

Modelo computacional para reconhecer LFs

Dado um FA M, dizemos que M *reconhece* a linguagem formal L(M) definida por

$$L(M) = \{\ \alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0,\alpha) \cap F \neq \varnothing\ \}$$

Dado $\alpha \in \Sigma^*$, o comportamento de M a partir de q_0,

$\delta^*(q_0,\alpha)$, computa se $\alpha \in L(M)$ ou não

A & C: Autômatos finitos 1

Modelo computacional para reconhecer LFs

Dado um FA M, dizemos que M *reconhece* a linguagem formal L(M) definida por

$$L(M) = \{ \alpha \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0,\alpha) \cap F \neq \varnothing \}$$

Dado $\alpha \in \Sigma^*$, o comportamento de M a partir de q_0,

$\delta^*(q_0,\alpha)$, computa o predicado $\alpha \in L(M)$, isto é:

$\delta^*(q_0,\alpha) \in F$ ou $\notin F$ (DFA)

$\delta^*(q_0,\alpha) \cap F \neq \varnothing$ ou $= \varnothing$ (NFA)

A & C: Autômatos finitos 1

Equivalência funcional entre NFAs e DFAs

Dado qualquer NFA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, existe DFA M' que reconhece a mesma linguagem:

A & C: Autômatos finitos 1

Equivalência funcional entre NFAs e DFAs

Dado qualquer NFA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, existe DFA M' que reconhece a mesma linguagem:

$$M' = (2^Q, \Sigma, \{q_0\}, \delta', F')$$

A & C: Autômatos finitos 1

Equivalência funcional entre NFAs e DFAs

Dado qualquer NFA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, existe DFA M' que reconhece a mesma linguagem:

$$M' = (2^Q, \Sigma, \{q_0\}, \delta', F')$$

δ' determinada pela tabela de transições de M

A & C: Autômatos finitos 1

Equivalência funcional entre NFAs e DFAs

Dado qualquer NFA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, existe DFA M' que reconhece a mesma linguagem:

$$M' = (2^Q, \Sigma, \{q_0\}, \delta', F')$$

δ' determinada pela tabela de transições de M

Na 1a. Lista: descrever formalmente δ', F' e mostrar que $L(M') = L(M)$

A & C: Autômatos finitos 1

Equivalência funcional entre NFAs e DFAs

Dado qualquer NFA $M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, existe DFA M' que reconhece a mesma linguagem:

$$M' = (2^Q, \Sigma, \{q_0\}, \delta', F')$$

δ' determinada pela tabela de transições de M

Na 1a. Lista: descrever formalmente δ', F' e mostrar que L(M') = L(M), ou seja

$$\delta'^*(\{q_0\},\alpha) \in F' \Leftrightarrow \delta^*(q_0,\alpha) \cap F \neq \emptyset$$

A & C: Autômatos finitos 1

Linguagens reconhecíveis por FAs

Dado $\mathcal{M}_{FA} = \{ M \mid M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F) \text{ é FA} \}$

define-se a classe das Linguagens Regulares

$$\mathcal{L}_{Reg} = \{ L \subseteq \Sigma^* \mid \exists M \in \mathcal{M}_{FA} [L = L(M)] \}$$

A & C: Autômatos finitos 1

Linguagens reconhecíveis por FAs

Dado $\mathcal{M}_{FA} = \{ M \mid M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F) \text{ é FA} \}$

define-se a classe das Linguagens Regulares

$$\mathcal{L}_{Reg} = \{ L \subseteq \Sigma^* \mid \exists M \in \mathcal{M}_{FA} \, [L = L(M)] \}$$

L é *regular* $\Leftrightarrow_{def.}$ L é reconhecível por algum FA

A & C: Autômatos finitos 1

Linguagens reconhecíveis por FAs

Dado $\mathcal{M}_{FA} = \{ M \mid M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F) \text{ é FA}\}$

define-se a classe das Linguagens Regulares

$$\mathcal{L}_{Reg} = \{ L \subseteq \Sigma^* \mid \exists M \in \mathcal{M}_{FA} [L = L(M)] \}$$

L é *regular* $\Leftrightarrow_{def.}$ L é reconhecível por algum FA

- L(M) é infinita $\Rightarrow$ grafo de M contém ciclo

A & C: Autômatos finitos 1

Linguagens reconhecíveis por FAs

Dado $\mathcal{M}_{FA} = \{\ M \mid M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ é FA$\}$

define-se a classe das Linguagens Regulares

$$\mathcal{L}_{Reg} = \{\ L \subseteq \Sigma^* \mid \exists M \in \mathcal{M}_{FA}\ [\ L = L(M)\ ]\ \}$$

L é *regular* $\Leftrightarrow_{def.}$ L é reconhecível por algum FA

- L(M) é infinita $\Rightarrow$ grafo de M contém ciclo (caminho fechado, com vértice repetido).

A & C: Autômatos finitos 1

Linguagens reconhecíveis por FAs

Dado $\mathcal{M}_{FA} = \{\ M \mid M = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ é FA$\}$

define-se a classe das Linguagens Regulares

$$\mathcal{L}_{Reg} = \{\ L \subseteq \Sigma^* \mid \exists M \in \mathcal{M}_{FA}\ [\ L = L(M)\ ]\ \}$$

L é *regular* $\Leftrightarrow_{def.}$ L é reconhecível por algum FA

- L(M) é infinita $\Rightarrow$ grafo de M contém ciclo (caminho fechado, com vértice repetido).

  Demonstração: 1a. Lista