Autômatos e computabilidade

Elementos básicos

Pedro A D Rezende
UnB – IE – CIC

A & C: Elementos básicos

Números Naturais: $\mathrm{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Alfabeto: $\Sigma =$ conjunto finito não vazio

Cadeia (*string*): $\alpha = a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ onde

$a_i \in \Sigma$; $0 \leq i < n \in \mathrm{N}$ (α é dita *cadeia de* Σ)

A & C: Elementos básicos

Números Naturais: $\mathrm{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Alfabeto: $\Sigma =$ conjunto finito não vazio

Cadeia (*string*): $\alpha = a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ onde

$a_i \in \Sigma$; $0 \leq i < n \in \mathrm{N}$ (α é dita *cadeia de* Σ)

α é alguma função $f{:}\{0, \ldots, n-1\} \rightarrow \Sigma$; $n \in \mathrm{N}$

A & C: Elementos básicos

Números Naturais: $\mathrm{N} = \{0, 1, 2, ...\}$

Alfabeto: Σ = conjunto finito não vazio

Cadeia (*string*): $\alpha = a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ onde

$a_i \in \Sigma$; $0 \leq i < n \in \mathrm{N}$ (α é dita *cadeia de* Σ)

(α é alguma função f:$\{0, ..., n-1\} \rightarrow \Sigma$; $n \in \mathrm{N}$)

Comprimento da cadeia: $|\alpha| = |a_0 ... a_{n-1}| = n$

A & C: Elementos básicos

Números Naturais: $\mathrm{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Alfabeto: $\Sigma =$ conjunto finito não vazio

Cadeia (*string*): $\alpha = a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$ onde

$a_i \in \Sigma$; $0 \leq i < n \in \mathrm{N}$ (α é dita *cadeia de* Σ)

(α é alguma função $f\colon\{0, \ldots, n-1\} \rightarrow \Sigma$; $n \in \mathrm{N}$)

Comprimento da cadeia: $|\alpha| = |a_0 \ldots a_{n-1}| = n$

Cadeia vazia: λ (ou ε) é a cadeia tal que $|\lambda| = 0$

A & C: Elementos básicos

Notação: $\sum^{n} = \{\ \alpha$ cadeia de Σ tal que $|\alpha| = n\ \}$

Monóide Sintático gerado por Σ:

$$\sum^{*} = \bigcup_{n \in N} \sum^{n} = \{\ \alpha \text{ cadeia de } \Sigma\ \}$$

A & C: Elementos básicos

Notação: $\Sigma^{n} = \{\ \alpha$ cadeia de Σ tal que $|\alpha| = n\ \}$

Monóide Sintático gerado por Σ:

$$\Sigma^{*} = \bigcup_{n \in N} \Sigma^{n} = \{\ \alpha \text{ cadeia de } \Sigma\ \}$$

Operação de concatenação $\circ$ em Σ^{*}:

dados $\alpha = a_{0} \ldots a_{n-1} \in \Sigma^{n}$, $\beta = b_{0} \ldots b_{m-1} \in \Sigma^{m}$ tem-se

$$\alpha \circ \beta = a_{0} \ldots a_{n-1} b_{0} \ldots b_{m-1} \in \Sigma^{n+m}$$ (abrevia-se $\alpha\beta$)

A & C: Elementos básicos

Notação: $\Sigma^{n} = \{\ \alpha$ cadeia de Σ tal que $|\alpha| = n\ \}$

Monóide Sintático gerado por Σ:

$$\Sigma^{*} = \bigcup_{n \in \mathrm{N}} \Sigma^{n} = \{\ \alpha \text{ cadeia de } \Sigma\ \}$$

Operação de concatenação $\circ$ em Σ^{*}:

dados $\alpha = a_{0} \ldots a_{n-1} \in \Sigma^{n}$, $\beta = b_{0} \ldots b_{m-1} \in \Sigma^{m}$ tem-se

$$\alpha \circ \beta = a_{0} \ldots a_{n-1} b_{0} \ldots b_{m-1} \in \Sigma^{n+m} \text{ (abrevia-se } \alpha\beta)$$

λ (ou ε) é elemento neutro para a operação $\circ$

A & C: Elementos básicos

Linguagem Formal

$L \subseteq \Sigma^*$ (um conjunto de cadeias de um alfabeto Σ)

A & C: Elementos básicos

Linguagem Formal

$L \subseteq \Sigma^*$ (um conjunto de cadeias de um alfabeto Σ)

Operações com linguagens formais (afora $\cup$, $\cap$, etc.):

$L \circ L' = LL' = \{ \alpha\beta \text{ t.q. } \alpha \in L \wedge \beta \in L' \}$ (concatenação)

$(L^n = L \circ L \circ \ldots \circ L$ n vezes$)$

A & C: Elementos básicos

Linguagem Formal

$L \subseteq \Sigma^*$ (um conjunto de cadeias de um alfabeto Σ)

Operações com linguagens formais (afora $\cup$, $\cap$, etc.):

$L \circ L' = LL' = \{ \alpha\beta \text{ t.q. } \alpha \in L \wedge \beta \in L' \}$ (concatenação)

$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n = \{\lambda\} \cup \{\alpha_1 \ldots \alpha_n \; ; \; \alpha_i \in L \; ; \; 0 < i \leq n \in \mathbb{N}\}$

(fecho por concatenação ou fecho de Kleene)

A & C: Elementos básicos

Linguagem Formal

$\mathtt{L} \subseteq \Sigma^*$ (um conjunto de cadeias de um alfabeto Σ)

Operações com linguagens formais (afora $\cup$, $\cap$, etc.):

$\mathtt{L} \circ \mathtt{L'} = \mathtt{LL'} = \{ \alpha\beta \text{ t.q. } \alpha \in \mathtt{L} \wedge \beta \in \mathtt{L'} \}$ (concatenação)

$\mathtt{L}^* = \bigcup_{\mathtt{n} \in \mathbb{N}} \mathtt{L}^{\mathtt{n}} = \{\lambda\} \cup \{\alpha_1 \ldots \alpha_{\mathtt{n}} \; ; \; \alpha_{\mathtt{i}} \in \mathtt{L} \; ; \; \mathtt{0} < \mathtt{i} \leq \mathtt{n} \in \mathbb{N}\}$

(fecho por concatenação ou fecho de Kleene)

$\alpha \in \mathtt{L}$ = `true` ou `false`? (reconhecimento)

A & C: Elementos básicos

Notação para operações com conjuntos

$A – B = \{ a \in A \text{ t.q. } a \notin B \}$ (diferença)

A & C: Elementos básicos

Notação para operações com conjuntos

$A – B = \{ a \in A$ t.q. $a \notin B \}$ (diferença)

$A \times B = \{ (a,b)$ t.q. $a \in A \wedge b \in B \}$ (produto direto)

(a,b) = par ordenado (função $f : \{0, 1\} \rightarrow \{a, b\}$)

A & C: Elementos básicos

Notação para operações com conjuntos

$A - B = \{ a \in A$ t.q. $a \notin B \}$ (diferença)

$A \times B = \{ (a,b)$ t.q. $a \in A \wedge b \in B \}$ (produto direto)

(a,b) = par ordenado (função $f : \{0, 1\} \rightarrow \{a, b\}$)

$2^A = \mathcal{P}(A) = \{ B$ t.q. $B \subseteq A \}$ (partes de A)

A & C: Elementos básicos

Notação para operações com conjuntos

$A-B = \{ a \in A$ t.q. $a \notin B \}$ (diferença)

$A \times B = \{ (a,b)$ t.q. $a \in A \wedge b \in B \}$ (produto direto)

(a,b) = par ordenado (função $f: \{0, 1\} \to \{a, b\}$)

$2^A = \mathcal{P}(A) = \{ B$ t.q. $B \subseteq A \}$ (partes de A)

Relação binária:

$R \subseteq A \times B$ (Denotamos aRb se $(a,b) \in R$)

A & C: Elementos básicos

Notação para operações com conjuntos

$A - B = \{ a \in A \text{ t.q. } a \notin B \}$ (diferença)

$A \times B = \{ (a,b) \text{ t.q. } a \in A \wedge b \in B \}$ (produto direto)

(a,b) = par ordenado (função $f: \{0, 1\} \to \{a, b\}$)

$2^A = \mathcal{P}(A) = \{ B \text{ t.q. } B \subseteq A \}$ (partes de A)

Relação binária:

$R \subseteq A \times B$ (Denotamos aRb se $(a,b) \in R$)

Notação: $R(a) = \{ b \in B \mid (a,b) \in R \}$; $R(A') = \bigcup_{a \in A' \subseteq A} R(a)$

A & C: Elementos básicos

Notação para operações com conjuntos

$A – B = \{ a \in A$ t.q. $a \notin B \}$ (diferença)

$A \times B = \{ (a,b)$ t.q. $a \in A \wedge b \in B \}$ (produto direto)

(a,b) = par ordenado (função $f : \{0, 1\} \rightarrow \{a, b\}$)

$2^A = \mathcal{P}(A) = \{ B$ t.q. $B \subseteq A \}$ (partes de A)

Relação binária:

$R \subseteq A \times B$ (Denotamos aRb se $(a,b) \in R$)

Relação binária sobre um conjunto: $R \subseteq A \times A$

A & C: Elementos básicos

Relação de equivalência:

$R \subseteq A \times A$ é dita relação de equivalência se for:

A & C: Elementos básicos

Relação de equivalência:

$R \subseteq A \times A$ é dita relação de equivalência se for:

Reflexiva: $\forall x \in A\ [xRx]$

A & C: Elementos básicos

Relação de equivalência:

$R \subseteq A \times A$ é dita relação de equivalência se for:

Reflexiva: $\forall x \in A\ [xRx]$

Simétrica: $xRy \Rightarrow yRx$

A & C: Elementos básicos

Relação de equivalência:

$R \subseteq A \times A$ é dita relação de equivalência se for:

Reflexiva: $\forall x \in A\ [xRx]$

Simétrica: $xRy \Rightarrow yRx$

Transitiva: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (R denotado por $\equiv$)

A & C: Elementos básicos

Relação de equivalência:

$R \subseteq A \times A$ é dita relação de equivalência se for:

Reflexiva: $\forall x \in A\ [xRx]$

Simétrica: $xRy \Rightarrow yRx$

Transitiva: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (R denotado por $\equiv$)

Classes de equivalência:

$\equiv$ particiona A em classes disjuntas $[x]_{\equiv}$, $x \in A$

$[x]_{\equiv} = \{ y \in A \mid x \equiv y \}$

A & C: Elementos básicos

Conjunto quociente:

Uma rel. de equivalência $\equiv$ sobre A define, pela partição, o conjunto de classes ou *quociente*

$$A/\!\equiv \;=\; \{\, [x]_{\equiv} \mid x \in A \,\}$$

A & C: Elementos básicos

Conjunto quociente:

Uma rel. de equivalência $\equiv$ sobre A define, pela partição, o conjunto de classes ou *quociente*

$A/\equiv \; = \; \{ \, [x]_{\equiv} \mid x \in A \, \}$

Exemplos: $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\equiv$ onde $(a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

$(\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\})$

A & C: Elementos básicos

Conjunto quociente:

Uma rel. de equivalência $\equiv$ sobre A define, pela partição, o conjunto de classes ou *quociente*

$A/\equiv \; = \; \{ \, [x]_{\equiv} \mid x \in A \, \}$

Exemplos: $(Z \times Z)/\equiv$ onde $(a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

$Q = (Z \times Z)/\equiv - \{[(a,0)]_{\equiv}\} =$

$\{ \, [(a,b)]_{\equiv} \mid a \in Z, \, b \in Z - \{0\} \, \}$ (Números Racionais)

A & C: Elementos básicos

Conjunto quociente:

Uma rel. de equivalência $\equiv$ sobre A define, pela partição, o conjunto de classes ou *quociente*

$A/\equiv \;=\; \{\, [x]_\equiv \mid x \in A \,\}$

Exemplos: $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\equiv$ onde $(a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$

$Q = (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\equiv - \{[(a,0)]_\equiv\} =$

$\{\, [(a,b)]_\equiv \mid a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z}-\{0\} \,\}$ (Números Racionais)

Notação: em Q, $[(a,b)]_\equiv$ é abreviado a/b

A & C: Elementos básicos

Cardinais

A relação $\cong$ (equipotência):

$A \cong B$ se $\exists\, f : A \to B$ função bijetora

é uma relação de equivalência entre conjuntos.

A & C: Elementos básicos

Cardinais

A relação $\cong$ (equipotência):

$A \cong B$ se $\exists\, f{:}A \to B$ função bijetora

é uma relação de equivalência entre conjuntos.

$[A]_{\cong}$ (abreviado $|A|$) é dito *cardinal(idade) de* A

A & C: Elementos básicos

Cardinais

A relação $\cong$ (equipotência):

$A \cong B$ se $\exists\ f$:$A \rightarrow B$ função bijetora

é uma relação de equivalência entre conjuntos.

$[A]_{\cong}$ (abreviado $|A|$) é dito *cardinal(idade) de* A

A relação $\leq$ (equipotência com algum subconjunto):

$|A| \leq |B|$ se $\exists\ C \subseteq B \mid A \cong C$

é uma relação de ordem entre cardinais.

A & C: Elementos básicos

Cardinais

A relação $\cong$ (equipotência):

$A \cong B$ se $\exists\, f{:}A \to B$ função bijetora

é uma relação de equivalência entre conjuntos.

$[A]_{\cong}$ (abreviado $|A|$) é dito *cardinal(idade) de* A

A relação $\leq$ (equipotência com algum subconjunto):

$|A| \leq |B|$ se $\exists\, C \subseteq B \mid A \cong C$

é uma relação de ordem entre cardinais.

OBS: $\forall A\, [|A| < |\mathcal{P}(A)|]$ i.e., $A \not\cong \mathcal{P}(A)$ (dem. adiada)

A & C: Elementos básicos

Algumas Questões Fundamentais

- Cadeias são finitas; linguagens formais (LF) nem sempre.

A & C: Elementos básicos

Algumas Questões Fundamentais

- Cadeias são finitas; linguagens formais (LF) nem sempre.
- LF finitas são triviais; as infinitas motivam A & C.

A & C: Elementos básicos

Algumas Questões Fundamentais

- Cadeias são finitas; linguagens formais (LF) nem sempre.
- LF finitas são triviais; as infinitas motivam A & C.
- A motivação é pela busca de métodos *finitários* para a execução de processos *potencialmente ilimitados*.

A & C: Elementos básicos

Algumas Questões Fundamentais

- Cadeias são finitas; linguagens formais (LF) nem sempre.
- LF finitas são triviais; as infinitas motivam A & C.
- A motivação é pela busca de métodos *finitários* para a execução de processos *potencialmente ilimitados*.
- Por exemplo, para a operação de reconhecimento ($\alpha \in L$?)

A & C: Elementos básicos

Algumas Questões Fundamentais

- Cadeias são finitas; linguagens formais (LF) nem sempre.
- LF finitas são triviais; as infinitas motivam A & C.
- A motivação é pela busca de métodos *finitários* para a execução de processos *potencialmente ilimitados*.
- Por exemplo, para a operação de reconhecimento ($\alpha \in L$?)
- Para conjuntos infinitos, fariam sentido expressões como

$$|A \times B| = |A||B| \quad ; \quad |L \circ L'| \leq |L||L'|$$

$$|\mathcal{P}(A)| = |2^A| = 2^{|A|} \quad ; \quad |\Sigma^*| < |\mathcal{P}(\Sigma^*)| = |\{L \subseteq \Sigma^*\}| \quad ?$$

A & C: Elementos básicos

Algumas Questões Fundamentais

- Cadeias são finitas; linguagens formais (LF) nem sempre.
- LF finitas são triviais; as infinitas motivam A & C.
- A motivação é pela busca de métodos *finitários* para a execução de processos *potencialmente ilimitados*.
- Por exemplo, para a operação de reconhecimento ($\alpha \in L$?)
- Para conjuntos infinitos, fariam sentido expressões como

$$|A \times B| = |A||B| \qquad ; \qquad |L \circ L'| \leq |L||L'|$$

$$|\mathcal{P}(A)| = |2^A| = 2^{|A|} \qquad ; \qquad |\Sigma^*| < |\mathcal{P}(\Sigma^*)| = |\{L \subseteq \Sigma^*\}| \quad ?$$

- Se fazem sentido, quais as consequências para A & C ?